This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Collection B.

LELAND·STANFORD·JVNIOR·VNIVERSITY

80

...en

...ten

...enthält.

...ROFILMED BY
...Y LIBRARIES
...ON 1994. CONSULT
...LOCATION.

...demischen Schriften. 1773.

Abhandlungen

der

Churfürſtlich-baieriſchen

Akademie

der

Wiſſenſchaften

Achter Band,

Welcher die philoſophiſchen enthält.

THIS ITEM HAS BEEN MICROFILMED BY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
REFORMATTING SECTION 1994. CONSULT
SUL CATALOG FOR LOCATION.

München, mit akademiſchen Schriften. 1773.

NB. In der letzten S. der Vorrede Z. 22. lese anstatt 7ten Band 8ten Band.

178413

Vorrede.

Hier erscheint nunmehr auch der 7te Band akademischer Abhandlungen von der philosophischen Classe, nachdem unsre beyden Classen dergestalt getrennet sind, daß man sie fast nicht mehr tanquam unum corpus betrachten kann. Indessen interessiret dieses die Liebhaber am wenigsten: wovon doch nicht alle in Ansehung der objecte in Wissenschaften vollkommen gleichgültig seyn können: indem gleichwohl einige an den philosophischen Sachen, andere an den historischen mehr Geschmack und Ammuth finden. Diese gewinnen bey unserer Abtheilung

von Abhandlungen, weil ſie ſich daraus wählen können, was Ihnen gefällt, ohne was bezahlen zu dörfen, was ſie für ſich undienlich halten. Und diejenigen, die ſich an beyden objecten gleichviel ergötzen, verlieren nichts bey ſolcher Abtheilung, weil Ihnen beyderley Abhandlungen abgeſondert nicht höher zu ſtehen kommen, als wenn ſie zuſammen gedruckt und gebunden wären.

Hätten die Verleger dieſer Abhandlungen hierauf Acht gehabt; oder wenn ſie vorgeſehen hätten, daß die glückliche Einverſtändniß unter den beyden akademiſchen Claſſen nur 8. Jahre lang dauern würde: ſo würden ſie ſich gleich im Anfange ihre Arbeiten nach den Geſinnungen getheilet, und jede beſonders herausgegeben haben. Davon würde das Publicum eben ſowohl profitiret haben, ohne um die Urſachen ſolcher Einrichtung im mindeſten bekümmert geweſen zu ſeyn; welche nunmehr bey der Abänderung deſſen Aufmerkſamkeit nicht leicht entgehen können.

Der philoſophiſchen Claſſe wird es nicht an Stoffe mangeln, auch ohne Begleitung der hiſtoriſchen ganz allein in der gelehrten Welt zu erſcheinen: und dieſes fürs zukünftige.

Was das vergangene betrift, ſo hat man anfänglich in den erſten 4. Bänden beyderley Abhandlungen beyſammen laſſen wollen. Nachdem es aber einigen Mitgliedern aus der hiſtoriſchen Claſſe, welchen wir die Trennung bey-

der

der Classen hauptsächlich zu verdanken haben, gefallen, die ersten 4. Bände der akademischen Abhandlungen, aus denen kein einziges Stück von ihrer Arbeit ist, im gemeinschaftlichen Bücherverlag aus einander zu reißen, und die Titelblätter zu zerschneiden; so finden sich die Verleger, welche das geschehene nicht ungeschehen machen können, in die Nothwendigkeit gesetzet, die philosophischen und historischen Abhandlungen dieser ersten 4. Bände, soviel noch davon im Verlag übrig ist, ebenfalls abgesöndert abzugeben. Das Glück dabey ist noch dieses, daß jeder Theil seine eigenen Alphabetzeichen, Seitennumern und Register hat. So, daß es auf nichts anders ankömmt, als daß jeder Theil mit einem neuen Titelblat, und einer eigenen Vorrede versehen werde, welches in Kürze der Zeit geschehen wird.

Der gegenwärtige 7te Band enthält dreyzehen Abhandlungen, wovon die erste ein Zusatz des Herrn Professors Karsten in Büzow, und gleichsam ein Anhang zu derjenigen Theorie von Projectionen der Kugel ist, die man im 5ten Bande der philosophischen Abhandlungen S. 109. findet. In diesem Zusatze wird solche Theorie mit derjenigen von Kegelschnitten verglichen, und ihre vollkommene Uebereinstimmung gezeiget. Der Herr Verfasser liefert uns nicht nur allgemeine analytische Formeln, woraus des Appollonius Sätze von den Kegelschnitten nach der verschiedenen Lage der planorum Secantium hergeleitet werden können;

ſondern er machet ſie auch noch allgemeiner, indem er ſie auf ſchiefe Kegelſchnitte anwendet, wo man nicht nach dem apolloniſchen Syſtem die Axe des Kegels auf die Zirkelfläche im Mittelpuncte ſenkrecht vorausſetzet.

Der Begriff von dieſer Art Kegelſchnitte iſt von demjenigen unterſchieden, welche Herr Euler in ſeiner Introd. in Anal. Inf. Tom. II. Append. Cap. III. giebt: welcher für einen ſchiefen Kegel denjenigen annimmt, deſſen Grundfläche eine Ellipſe iſt, und deſſen mit der Grundfläche parallelen Sechonen allemal elliptiſche Figuren geben, an welche Appollonius in ſeiner Theorie von Kegelſchnitten nicht gedacht hat, und die nach Verſchiedenheit ihrer Grundflächen beſondere Klaſſen von kegelartigen Körpern formiren, deren jede wiederum in gerade und ſchiefe Kegel abgetheilet werden könnten. Unſer Herr Verfaſſer zeiget in verſchiedenen Aufgaben, wie alle dieſe Kegelarten berechnet, und die Natur der Projectionen gefunden werden können; man mag dem Auge, worinnen man immer die Spitze des Kegels ſupponiret, in Anſehung einer jeden Fläche, als Grundfläche des Kegels betrachtet, eine Lage geben, welche man immer wolle. Man wird demnach nicht leicht etwas vollſtändigers in dergleichen Materie finden, als in dieſen beyden Abhandlungen von projectionen der Kugel.

Das

Das zweyte Stück S. 93. u. f. von der archimedeischen Wasserschraube ist ebenfalls von vorgenanntem Herrn Professor Karsten, welcher unter den größten Geometern unserer Zeit einen vorzüglichen Rang verdienet, und der, wiewohl er ein Ausländer ist, und fast an den äußersten Gränzen des nordischen Deutschlands lebet, dennoch zur Aufnahme der churbaierischen Akademie und zur Bereicherung ihrer Abhandlungen mehr beyträgt, als wohl zehen Innländer nicht thun, von denen einige mit großem Geschrey die Leute überreden wollen, und Unwissende auch wirklich überreden, als wenn die Akademie ohne sie nicht bestehen könnte, welche vieleicht, ohne sie, weit blühender seyn würde, als sie wirklich ist.

Wer sollte wohl gedacht haben, daß sich über die archimedeische Wasserschraube, eine so uralt-bekannte Maschine, noch was sagen ließe, das man nicht in hundert andern und selbst in den Elementar-Büchern von der Hydraulik findet. Indessen ist doch gewiß, daß die Eigenschaften dieser Maschine noch bey weiten nicht völlig aufgekläret sind. Selbst der große Analyst, Herr Euler hat in den comment. nov. Petrop. Tom. V. die Theorie davon unvollkommen lassen müssen: weil er auf eine Differentialgleichung der Geschwindigkeit des Wassers in der Spiralröhre gefallen ist, die sich nicht integriren läßt. Dieß mag wohl der berliner Akademie Anlaß gegeben haben, im Jahr 1766. die Preisfrage aufzuwerfen, wie

eine

eine Wasserschraube am vortheilhaftesten anzuordnen sey? Worüber sie den Preis dem Herrn Hennert zuerkannt hat. Herr Karsten findet aber die Hennertische Auflösung nicht für zureichend, und hält dafür, daß obige Preisfrage in der Hauptsache unbeantwortet geblieben sey. Das hat ihn veranlasset, gegenwärtige Abhandlung zuschreiben. Er schmeichelt sich zwar nicht, diese Materie völlig erschöpft zu haben, doch hat er sie so weit getrieben, als es die Schwürigkeit der Theorie immer zuläßt: und es steht zu hoffen, daß die künstliche Entwickelung seiner analytischen Formeln Ihm selbsten oder andern großen Geometern den Weg bahnen werden, die nützliche Theorie von den Wasserschrauben zu ihrer absoluten Vollständigkeit zu bringen.

Im dritten Stücke S. 87. u. f. handelt Herr Doctor Buchholz zu Weimar vom Spießglas-Schwefel, und giebt, nach manchen Versuchen, die er alle mit Umständen erzählet, eine Methode an Hand, wie dieser Spießglasschwefel gleich nach dem ersten Niederschlage eben so gut corrigiret und zur Medicin brauchbar gemachet werden könne, als derjenige vom 4ten Niederschlag, den man nach der gewöhnlichen Art zubereitet.

Der Verfasser des 4ten Stückes von den Saugwerken S. 97. u. f. ist wiederum unser mehrbelobter Herr Professor Karsten. Dies Stück ist sehr practisch, und gleichwohl die ganze vollständige Theorie von Saugwerken

ken auf die höhere Analyse gegründet. Der Herr Verfasser theilet sie in vollkommene, unvollkommene und mittlere. Vollkommene Saugwerke sind diejenigen, welche keinen schädlichen Raum haben, und die soviel Wasser geben, als in einer gegebenen Zeit möglich ist: die erste noehwendige Bedingniß hiebey ist, daß das Ventil oben an der Saugröhre seyn muß. Unvollkommene sind, die ihr Ventil zu unterst der Saugröhre haben. Mittlere endlich sind, die zwar ihr Ventil oben an der Saugröhre haben, aber zwischen den Kolben und der Grundfläche des Stiefels einen leeren oder schädlichen Raum lassen. Der H. V. giebt Berechnungen für alle Arten an, und untersuchet in zweyen Abschnitten: 1) die anfängliche Bewegung des Wassers in der Saugröhre und dem Stiefel, ehe es noch den Kolben erreichet, und 2) seine Bewegung in dem Stiefel, wenn schon alle Luft aus dem schädlichen Raume ausgetretten ist. Liebhaber der Hydraulik werden diese Abhandlung mit Vergnügen lesen: worinnen sie die analytischen Formeln auf Gegenstände dieser Art so zu verläßig angewendet finden werden.

Das fünfte Stück, das ist Versuch eines evidenten Beweises der allgemeinen mechanischen Grundsätze S. 147. u. f. haben wir ebenfalls dem unermüdeten Fleiße des H. Professors Karsten zu danken. Es ist leichter (saget der Herr Verfasser,) die physikalischen Wissenschaften zu erweitern, nachdem man es mit den Differential- und In-

Berechnungen so weit gebracht hat, als die ersten Anfangsgründe derselben recht evident und ungezweifelt zu beweisen. Dieses Stück dienet zu einer Probe, wie behutsam man verfahren müsse, wenn man sich reine Begriffe bilden, und nicht von vorangenommenen Blendwerken der Einbildungskraft auf Irrwege verleitet werden will.

Im sechsten Stücke S. 177. beantwortet Herr Ulstbius Amort, Canonicus Regularis in Polling die Frage: wo so viele Ausgüßungen der Flüße in Baiern herrühren, und wie denselben abzuhelfen sey? der Herr Verfasser sieht die Ursache dieser Ueberschwemmungen in dem häufig anwachsenden Sande, und schlägt etliche Mittel vor, wie man diesem Uebel auf eine leichte Art steuren, und dadurch die Flüsse in ihrem ursprünglichen Bette erhalten könne. Die Schriften dieses berühmten Mannes haben allezeit ihren besondern Werth, sollten sie auch noch so klein seyn. Und um dieser Betrachtung willen haben wir diese kleine Piece hier einschalten wollen.

Der Herr Verfasser erzählet am Ende die Stiftung eines Hofmalers, Namens Amorth, (der vermuthlich aus seiner Familie war) um nächst Lengries in ober Baiern die Iser von großen Steinen zu reinigen. Und füget als ein wahrer Patriot den frommen Wunsch hinzu, daß begüterte Leute in Baiern diesem Beyspiele folgen, und entweder bey ihren Lebszeiten oder durch letztwillige Vermächt-

mächtnissen dergleichen Stiftungen zu Säuberung der Flüsse, von dem anwachsenden Sande, zu Verhütung der Ueberschwemmungen zu machen. Der Gedanken ist freylich wie der Herr Autor saget, süße: er ist aber den reichen Stiftern älterer und neuerer Zeiten nicht besonders fühlbar, die nur um das remedium animarum suarum besorget sind, und vermittelst ihrer meistentheils unrechtmäßig erworbenen Güter, alsdenn erst, wenn sie selbige nicht mehr genießen können, das ist, in articulo mortis mit dem Himmel gleichsam composition treffen wollen, ohne sich viel darum zu bekümmern, ob es ihrem Vaterlande nach ihrem Tode wohl oder übel ergehe: weil sie, als Todte und Bürger der andern Welt, mit der unsrigen nichts zeitliches mehr gemein haben. Vieleicht dörften aber doch dergleichen menschenfreundliche Stiftungen mit der Zeit mehr, als jetzo, in die Mode kommen, wenn nur lauter solche Beichtväter, wie der patriotische Herr Amort ist, den reichen Sterbenden assistirten.

Das 7te Stück, S. 181. u. f. von verschiedenen Wendungen der krummen Linien. Das Achte von den Centralkräften S. 203. u. f. Und das Neunte S. 245. u. f. von der Berechnung des im Jahre 1769. erschienenen Cometen, hat Herr P. Leonard Gruber, ein Benedictiner Religios von dem Kloster Meden, zur Akademie eingeschicket. Wir müßen die Recension dieser Stücke umgehen, um unsere Vorrede, die schon weitläuftig genug

ausgefallen, nicht noch weitläuftiger zu machen. Wir rücken aber dieſelben mit Vergnügen ein, weil ſie zur Probe dienen, wie die analytiſchen Wiſſenſchaften in unſerm Vaterlande, wo ſie bisher noch nicht allgemein worden, aufzukeimen anfangen; und wir wünſchen hiernächſt, daß unſere Landsleute durch dieſe Beyſpiele aufgemuntert werden möchten, dieſen Theil der höhern Geometrie, womit man in der Mathematik und Phyſik gleichſam Wunder thun kann, ihrer Aufmerkſamkeit und Bemühungen würdig achten, und andere aufgeklärte Nationen in dieſer Laufbahne, worinnen dieſelben es ſo weit gebracht haben, ſoviel möglich zu erreichen trachten möchten.

Schon dieſe wohlgerathenen Verſuche beweiſen, daß es auch in unſerm Clima nicht an Subjecten mangelt, die eine glückliche Anlage zu tiefſinnigen Unterſuchungen in der höhern Geometrie haben. Beſonders ſollten dieſe Beyſpiele unſere Ordensgeiſtlichen, des Herrn Verfaſſers Mitbrüder anreizen, in ihren vom Gebethe und Regular-Uebungen übrigen Stunden ihren Geiſt mit ſo nützlichen und reellen Sublimitäten zu nähren und zu beſchäftigen, anſtatt die edle Zeit mit metaphyſiſchen Grillen und andern ſcholaſtiſchen Alfanzereyen zu verſchwenden, die weder den Geiſt zu erleuchten, noch vielweniger das Herz zu beſſern vermögend ſind.

Der Verfaſſer des 10ten Stücks S. 279. von dem unterirdiſchen Bau bey Bergwerken, iſt H. Carl Scheidt, der die akademiſchen Abhandlungen ſchon mit manchen

schönen Beyträgen von dieser Art bereichert hat. Zur Empfehlung dieses Stückes dörfen wir den Kennern nur sagen, daß der nämliche practische Bergbaugeist darinnen herrschet, den sie in den vorigen Abhandlungen von Herrn Scheidt, in dieser Materie gefunden haben. Es ist zwar nicht alles neu darinnen, der Herr Verfasser giebt es auch nicht dafür aus. Man findet aber darinnen viele neue brauchbare Anwendungen bekannter Wahrheiten. Und das ist doch noch das beste, was man nach soviel Entdeckungen in unseren aufgeklärten Zeiten noch erwarten kann. In der That fällt es nicht gar schwer zu entscheiden, ob manche nagelneue Erfindungen, die sich mit bloßen Speculationen endigen, nicht solchen Erweiterungen längst erfundener Wahrheiten nachzusetzen seyn, deren Ausübung dem menschlichen Geschlechte neue beträchtliche Vortheile gewähret.

In dem Eilften Stück S. 317. u. f. liefert Herr Doct. Med. Brunwieser, Stadtphysicus in der baierischen Stadt Kellheim verschiedene Versuche, mit mineralischen sauren Geistern allerhand Farben aus den Hölzern zu ziehen, und zeiget, wie aus diesen Farben, die Röthe, Blaue, Grüne, und Gelbe der Blüthen, Blumen, Früchten und Blätter der Vegetabilien erkläret werden mögen. Die angestellten Versuche sind aller Aufmerksamkeit werth, weil sie auf Schlüße führen können, die in einer so wichtigen Branche des Comercii, wie das Farbewesen ist, seiner Zeit manche Vortheile verschaffen dörften. Der

Herr Verfaſſer ſtellet ſich die Sache ſo vor, daß die Farben-Materie oder das Farbenweſen, mit einem alcaliſchen Salze genau verbunden, in dem Stamme der Bäume und Pflanzen verborgen liegt, und nachdem es alle Faſern des Stammes durchwandert hat, an der Oberfläche der Blätter, Blüthen und Früchten, durch die Action und das Berühren der Luft, welche ganz ungezweifelt mit allerhand ſauren Geiſtern imprägnirt iſt, von den Feſſeln des alcaliſchen Salzes, ſo ſich mit den ſauren Luftheilchen vereiniget, entbunden wird, und hiemit die mannichfaltigen Farben entwickelt, die wir an den Blättern, Blüthen und Früchten bewundern. Daß ein alcaliſches Salz in allen Holz- und Pflanzarten verborgen ſtecke, ſo mit den Farbeweſen verbunden iſt, davon haben ihn nicht nur des Herrn Marſchalls ſondern auch ſeine eigenen Verſuche überführet. Er nimmt drey urſprüngliche oder Grundfarben an, aus deren Vermiſchung alle übrigen entſtehen, nämlich gelb, roth und blau: und ſo giebt es auch in ſeinem Syſtem dreyerley mineralſäuren, deren eine jede auf eine von dieſen Grundfarben ihre vorzügliche Wirkung ausübet. So dienet die Salpeterſäure vornehmlich die gelbe Farbe hervorzubringen: die Vitriol- und Salzſäuren hingegen ſind für die rothen und blauen Farben gemacht.

Dieſe aus Erfahrungen hergeleiteten Betrachtungen haben den H. V. im zwölften Stücke auf eine Entdeckung gebracht, wie man vermittelſt der Salpeterſäure, aus verſchiedenen meiſtentheils ſehr ſchlechten und ſonſt unbrauch-

baren

baren Holzarten ein so schönes und dauerhaftes Gelb herauszuziehen und hiermit Wollen- Kameelharene und Seidenzeuge färben könne, die an Glanz und Dauerhaftigkeit den Indianischen und andern fremden Farben nichts nachgeben, wie die zur Akademie eingesendeten Musterproben zur Genüge beweisen.

Er hat zwar bis hieher die rothe und blaue Farbe mit seinen mineralischen sauren Geistern nicht erzwingen können. Vielleicht gelingt es ihm aber, und andern unermüdeten Chymisten, noch mit der Zeit, auch in Ansehung dieser Farben, durch hartnäckige Versuche, es eben so weit, als mit der gelben, zu bringen. Daß wir endlich vieleicht in unserm eigenen vegetabilischen Reiche alle Farben finden können, die wir jetzt mit so vielen Kosten von fremden Landen holen müssen.

Das letzte und dreyzehente Stück S. 353. u. f. haben wir von H. P. Clarus Mayr, Benedictiner Religiosen im Kloster Vormbach. Es enthält Gedanken, wie dem fast jährlichen von Austreten der Flüße verursachten Schaden nach den Naturgesätzen des Wassers zu steuren sey. Herr P. Clarus will seine akademische Pflicht erfüllen, welche, den Gesetzen zufolge, von einem jeden ordentlichen Mitgliede alle Jahre eine Abhandlung fordert. Er hat auch diese Pflicht seit seiner Aufnahme fleißig erfüllet, wie die akademischen Abhandlungen von Jahr zu Jahre bezeugen. O! möchte doch dieses rühmliche Beyspiel diejenigen beschämen und bekehren, die da immerfort diese Pflicht an-

dern

dern vorpredigen, und doch ſelbſten nichts anders thun, als Lärmen, Schreyen und Tadeln und die, wenn ſie in 12. Jahren einmal höchſtens zwey Bogen leichtes Zeug zu Markte bringen, andere für unnütze Mitarbeiter ausſchreyen, welche von den nichtigſten Sachen ganze Alphabete ſchreiben. Da die berühmte Abtey Vornbach, welcher der H. V. ſehr viel Ehre macht, am Inſtrom liegt; ſo hat derſelbe Gelegenheit gehabt, über die frequenten Austrettungen dieſes reiſſenden Stroms Betrachtungen genug anzuſtellen, welche ſeinem naturforſchenden Geiſte allerdings angemeſſen ſind. Die Vorſchläge, welche er thut, 1) die Flüſſe von der Ueberſchwemmung zu bewahren, und ſo unſchädlich zu machen als immer möglich iſt. 2) ſie in ihrem alten Rinnſal zu erhalten oder dahin zurückzuführen und 3) dieſe anſcheinenden Anomalien oder Feindſeligkeiten der Natur in Wohlthaten zu verkehren, ſind practiſch, nicht nur möglich ſondern gar leicht, und der Aufmerkſamkeit der Regenten ſowohl als des Landmanns allerdings würdig. Edle Bemühungen für Religioſen, die einem Orden zugehören, welchem ſo viele Länder, nebſt dem Lichte des Evangelii, auch ihre Cultur und zeitliche Nahrung zu danken haben. Wir beſchließen hier die Vorrede zum 7ten Band, empfehlen denſelben, wie alle vorige, dem Publico zur geneigten Aufnahme, und wünſchen nochmals herzlich, daß ſolche Schriften unſern Landsleuten zur Aufmunterung dienen möchten, das Reich der höhern Wiſſenſchaften zum Nutzen und zur Ehre des Vaterlandes durch ihre löbliche Bemühungen immer mehr zu erweitern.

Zusatz
zu
W. J. G. Karstens
Abhandlung
von den
Projectionen
der
Kugel.

Die Projectionen der Kugel als Kegelschnitte betrachtet.

1. §.

Alle Projectionen der Kugel sind Kegelschnitte, selbst die orthographischen Projectionen, wenn der Cylinder als ein Kegel betrachtet wird, dessen Axe unendlich groß ist; nur diejenigen Fälle sind hievon ausgenommen, wenn das Auge in der Ebene desjenigen Kreises der Kugel steht, dessen Projection auf der Tafel gesucht wird. Man stellet sich von allen Puncten im Umfang eines solchen Kreises der Kugel gerade Linien bis ins Auge gezogen vor, welches dabey als ein Punct betrachtet wird. Diese Linien liegen demnach in der Oberfläche eines Kegels, dessen Spitze das Auge, und dessen Grundfläche der Kreis auf der Oberfläche der Kugel ist; es wäre dann, daß die Ebene dieses Kreises durchs Auge gienge. Die Oberfläche dieses Kegels

wird von der Tafel geschnitten, und die Durchschnittlinie mit der Tafel ist die Projection des Kreises. Die alten Geometer haben daher die Kugel-Projectionen allemal als Kegelschnitte betrachtet, und es gehört zur Vollständigkeit der Abhandlung von den Projectionen der Kugel, welche ich im vorigen Jahr der Akademie überreicht habe, daß ich noch zeige, wie eine Theorie mit der andern zusammen hänge, und wie eben die Regeln für die Verzeichnung der Projectionen auch aus der Theorie von den Kegelschnitten folgen. Ich werde in solcher Absicht zuforderst die allgemeinen analytischen Formuln entwickeln, woraus alle Sätze, die Apollonius im ersten Buch von der Gestalt der Kegelschnitte nach der verschiedenen Lage der schneidenden Ebene beweiset, kurz und leicht können hergeleitet werden.

2. §.

Die neuern Schriftsteller, welche die Theorie von den Kegelschnitten analytisch abhandeln, zeigen gewöhnlich nur beyläufig, wie diese Linien aus dem geraden Kegel geschnitten werden können, um den Namen zu rechtfertigen, und zu beweisen, daß Linien der zweyten Ordnung und Kegelschnitte einerley Linien sind. Allein allgemeinere Betrachtungen darüber, wie diese Linien nicht allein aus dem geraden, sondern auch aus dem schiefen Kegel geschnitten werden können, haben in vielen Fällen der Ausübung ihren Nutzen, und die obangeführte Theorie von den Projectionen der Kugel ist hievon ein Beyspiel. Die neuere Analysis, und besonders der Gebrauch der allgemeinen trigonometrischen Formuln, erleichtert so, wie viele andere Theorien der Alten, auch diese Betrachtung ungemein, und man ist im Stande, vermittels einer einzigen allgemeinen Aufgabe, alles zu übersehen.

3. §.

3. §.

Hr. Euler betrachtet in der Introd. in Anal. Inf. T. II. Append. Cap. III. zwar die Schnitte des schiefen Kegels: allein der Begrif vom schiefen Kegel, welchen er bey seiner Analysi zum Grunde setzt, ist gänzlich von dem Begrif unterschieden, welchen man sonst mit dem Apollonius gewöhnlich annimmt. Herr Euler nennt nämlich einen schiefen Kegel denjenigen, dessen Grundfläche eine Ellipse, und dessen Axe auf der Ebene dieser Ellipse in ihrem Mittelpunkt senkrecht ist, und dessen Oberfläche übrigens die Eigenschaft hat, daß jeder mit der Grundfläche parallele Schnitt eine Ellipse giebt, die gleichfalls ihren Mittelpunkt in der Axe des Kegels hat. Dieser Begrif läßt sich auf den apollonischen schiefen Kegel gar nicht anwenden: es giebt in demselben gar keine Schnitte, die Ellipsen werden, und ihren Mittelpunkt in der Axe des Kegels haben. Der vom Hr. Euler so genannte schiefe Kegel gehört schon in die Klasse einer andern Art geometrischer Körper, die wegen der Aehnlichkeit mit dem Euclidäischen und Apollonischen Kegel ebenfalls den Namen eines Kegels führen können: aber alsdann erweitert man schon diesen Begrif auf solche Körper, deren Oberfläche mit der eigentlichen Kegelfläche nur diese Aehnlichkeit hat, daß alle gerade Linien, die ganz in diese Oberfläche fallen, sich in einerley Punkt, der die Spitze heißt, schneiden, übrigens aber durch den Umfang einer ebenen Figur gehen, die eine willkührliche Gestalt haben kann, da es beym eigentlichen Kegel ein Kreis seyn muß. Diese kegelartigen Körper kann man füglich wieder nach der verschiedenen Gestalt ihrer Grundfläche in Klassen eintheilen, und ihnen davon die Nämen beylegen. So könnte z. E. der vom Hrn. Euler so genannte schiefe Kegel ein elliptischer Kegel heissen, und dieß würde denn ein gerader oder schiefer elliptischer Kegel seyn, nachdem seine Axe auf der Grund-

fläche gerade oder schief stünde. Eben so theilt Apollonius die gewöhnlich so genannten Kegel in gerade und schiefe, nachdem ihre Axen die Grundfläche entweder senkrecht oder schief schneiden: und diesen Redegebrauch werde ich auch hier beybehalten. Uebrigens wird sich die folgende Untersuchung auf einige allgemeine Sätze gründen, die ich wegen der Vollständigkeit der Ausführung herseße, da man sie sonst auch beym Hrn. Euler am a. O. Append. Cap. II. §. 26. sq. antrift. Es wird dieß zugleich zur nähern Erläuterung des Eulerischen Vortrags dienen.

4. §.

Es ist die Lage einer Ebene FH (1. fig.) gegen eine andre KL gegeben, welche leztere eine bekannte Lage hat: man soll eine Gleichung für die Ebene FH zwischen dreyen rechtwinklichten Coordinaten suchen, wovon zwey in der Ebene KL liegen, die dritte aber auf ihr senkrecht ist: die Abscissen sollen auf der geraden Linie AB in der Ebene KL genommen werden, deren Lage gegen die Durchschnittslinie FG beyder Ebenen gleichfalls bekannt ist.

Aufl. Von einem unbestimmten Punkt M der Ebene FH sey MQ auf KL senkrecht, und QP auf AB ebenfalls senkrecht gesetzt; so sind $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$ drey senkrechte Coordinaten für die Ebene FH. Man seße, daß AB verlängert mit der Durchschnittslinie beyder Ebenen in F zusammen stosse, so ist $AF = b$, nebst dem Winkel $AFE = \psi$ gegeben. Ubrigens sey MS auf EF senkrecht, und man ziehe QS, so ist $QSM = \phi$, der Neigungswinkel beyder Ebenen, gleichfalls gegeben. Man lege nun durch MQ und F eine Ebene FQM, so ergiebet sich an F ein körperliches Dreyeck, dessen Seiten QFM, SFQ, und SFM sind. In demselben ist der Winkel an $FQ = 90°$, und der Winkel an

FS

FS = φ. Setzt man nun PFQ = ω, so wird die Seite SFQ = ψ + ω, und man erhält *tang* QFM = *sin* (ψ + ω) *tang* φ, also $x = FQ \sin(\psi+\omega)\tang\varphi$. Ferner wird $\sin\omega = \frac{Y}{FQ}$, $\cos\omega = \frac{b+x}{FQ}$. Weil nun $\sin(\psi+\omega) = \sin\psi\cos\omega + \cos\psi\sin\omega$, so drücke man *sin* ω und *cos* ω durch *y* und *x* aus, und man erhält die gesuchte Gleichung $z = b\sin\psi\tang\varphi + x\sin\psi\tang\varphi + y\cos\psi\tang\varphi$.

Wenn die Linie AB mit FE zusammen fällt, so wird ψ = 0, also *sin* ψ = 0, *cos* ψ = 1, und man erhält $z = y\tang\varphi$, so daß nun *z* von *x* gar nicht abhängt, wie den Eigenschaften einer Ebene, die in den Anfangsgründen bewiesen werden, gemäß ist.

5. §.

Es ist M (1. fig.) ein Punkt in der Oberfläche eines Körpers, wovon KL eine Durchschnittsfigur vorstellt. Auf diese ist MQ senkrecht, so wie QP auf die grade Linie AB, die in der Ebene KL eine bekannte Lage hat, senkrecht gezogen ist, und man hat für des Körpers Oberfläche eine Gleichung zwischen den Coordinaten AP = *x*, PM = *y*, QM = *z*. Statt der Axe AB aber soll man eine andre FG für die Abscissenlinie annehmen, welche in der Ebene KL liegt, und die vorige unter dem Winkel BFG = ψ schneidet. **Die Frage ist: wie die Gleichung zwischen *x*, *y*, und *z* verändert werden müsse, wann übrigens die Coordinaten senkrecht bleiben.**

Aufl. Man setze auf AB durch A eine senkrechte Linie, welche FG in E schneidet, und nehme E für den neuen Anfangspunkt der Abscissen. Ueberdem sey QS, welche AB in D schnei-

det,

det, auf FG senkrecht. Iſt nun AF = b, ſo hat man PD = $y \, tang \, \Psi$, DQ = $\frac{Y}{cos \, \Psi}$, DS = $(b + x - PD) \, sin \, \Psi = (b + x) \, sin \, \Psi - y \, tang \, \Psi \, sin \, \Psi$, FS = $(b + x - PD) \, cos \, \Psi = (b + x) \, cos \, \Psi - y \, sin \, \Psi$, EF = $\frac{b}{cos \, \Psi}$, SQ = DS + DQ, ES = FS — EF. Wenn man nun ES = t, SQ = v ſetzt, ſo erhält

man $v = (b + x) \, sin \, \Psi - y \, tang \, \Psi \, sin \, \Psi + \frac{y}{cos \, \Psi}$

und $t = (b + x) \, cos \, \Psi - y \, sin \, \Psi - \frac{b}{cos \, \Psi}$.

die erſte Gleichung multiplicire man mit $cos \, \Psi$, die zweyte mit $sin \, \Psi$ und ſubtrahire ſodann die letzte von der erſten, ſo erhält man $v \, cos \, \Psi - t \, sin \, \Psi = y + v \, tang \, \Psi$, alſo 1) $y = v \, cos \, \Psi - t \, sin \, \Psi - v \, tang \, \Psi$. Dieß ſetze man ſtatt y in die zweyte Gleichung, ſo wird $b + x = \frac{t}{cos \, \Psi} y \, tang \, \Psi + \frac{b}{cos \, \Psi^2}$, $= \frac{t}{cos \, \Psi} + v \, cos \, \Psi \, tang \, \Psi = t \, sin \, \Psi \, tang \, \Psi - b \, tang \, \Psi^2 + \frac{b}{cos \, \Psi^2}$, folglich $x = t \left\{ \frac{1 - sin \, \Psi^2}{cos \, \Psi} \right\} + v \, sin \, \Psi$, oder 2) $x = t \, cos \, \Psi + v \, sin \, \Psi$. Wenn dieſe beyden Werthe ſtatt x und y in die für die Oberfläche des Körpers gegebene Gleichung geſetzt werden, ſo erhält man die geſuchte Gleichung zwiſchen t, v, und x.

Wenn man AE = f ſetzt, ſo iſt $f = b \, tang \, \Psi$, und man hat $y = v \, cos \, \Psi - t \, sin \, \Psi - f$.

6. §.

Es bleibe M (1. fig.) ein Punkt auf der Oberfläche eines Körpers, wovon KL eine Durchſchnittsfigur iſt: dieſer Körper

werde

werde von einer andern Ebene FH geſchnitten, und es ſey FG ihre Durchſchnittslinie mit der vorigen Ebene KL. Die Gleichung für die Oberfläche des Körpers iſt zwiſchen AP = x, PQ = y, QM = z gegeben, und die Lage der Ebene FH gegen BC iſt gleichfalls bekannt. **Man ſoll eine Gleichung für die Durchſchnittslinie *MN* mit der Oberfläche des Körpers für rechtwinklichte Coordinaten ſuchen.**

Aufl. Wenn zwo Oberflächen einander ſchneiden, und man ſucht für jede dieſer Oberflächen eine Gleichung zwiſchen dreyen rechtwinklichten Coordinaten, für einerley Abſciſſenlinie und Anfangspunkt der Abſciſſen, ſo daß auch die Coordinaten x und y für beyde Oberflächen in einerley Ebene liegen; ſo hat man zwo Gleichungen zwiſchen dreyen Coordinaten, welche für die Durchſchnittslinie beyder Oberflächen gehören. Sind nämlich x = AP, y = PQ, z = QM dieſe drey Coordinaten, ſo iſt z in beyden Gleichungen einerley, wenn M ein Punkt iſt, der in beyden Oberflächen zugleich liegt. Iſt alſo die eine Oberfläche FH eine Ebene, die KL unter dem Winkel ϕ ſchneidet, iſt ferner AF = b, AFE = ψ; ſo drückt die Gleichung $z = b \sin\psi \operatorname{tg}\phi + x \sin\psi \operatorname{tg}\phi + y \cos\psi \operatorname{tg}\phi$ mit der Gleichung für die andere Oberfläche zuſammen genommen die Natur der Durchſchnittslinie MN aus. Allein weil in dieſem Fall MN eine Linie von einfacher Krümmung iſt, ſo iſt es vortheilhafter, eine Gleichung zwiſchen zwoen Coordinaten zu ſuchen, die in der Ebene der Linie MN ſelbſt liegen. In ſolcher Abſicht ziehe man QS auf die Durchſchnittslinie FG beyder Ebenen FH und KL ſenkrecht, und wenn auch AE auf AB ſenkrecht iſt, ſetze man FS = t, SM = v AE = f. Ferner ſuche man nach dem 5 §. für die Oberfläche des Körpers eine Gleichung zwiſchen t, v und z. Dieß geſchieht, indem man $z = t$

$cos\psi + v\,sin\psi$, und $y = v\,cos\psi - t\,sin\psi - f$ nimmt, und dieſe Werthe in der Gleichung zwiſchen x y und x ſtatt x und y ſetzt. Nun hat man überdem für die Ebene FH die Gleichung $x = v\,tang\Phi$, folglich zwo Gleichungen zwiſchen den dreyen Coordinaten t, v, x, für die Linie MN. Setzt man aber $AM = u$, ſo iſt $v = u\,cos\Phi$. Dieß in die Gleichung zwiſchen t, v und x geſetzt giebt eine andre zwiſchen t, u und x. Ueberdem aber wird $x = u\,cos\Phi\,tang\Phi = u\,sin\Phi$, und wenn man dieß ſtatt x ſetzt, ſo hat man eine Gleichung zwiſchen t und u. In ſolcher Abſicht kann alſo gleich anfangs in den Werthen von x und y, $u\,cos\Phi$ ſtatt v geſetzt werden, ſo hat man

$$x = u\,cos\Phi\,sin\psi + t\,cos\psi$$
$$y = u\,cos\Phi\,cos\psi - t\,sin\psi - f,$$

da dann dieſe beyden Werthe ſtatt x und y, imgleichen $u\,sin\Phi$ ſtatt x geſetzt, unmittelbar die geſuchte Gleichung zwiſchen t und u geben.

7. §.

Die Länge der Axe *AC* (2. Fig.) des ſchiefen Kegels *BCD*, nebſt dem Halbmeſſer *AB* ſeiner Grundfläche, und dem Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche = α ſind gegeben: man ſoll eine Gleichung zwiſchen dreyen rechtwinklichten Coordinaten für den Kegel ſuchen, ſo daß zwey derſelben in der Ebene der Grundfläche liegen, und die dritte auf ihr ſenkrecht ſteht.

Auflöſ. Man lege durch die Axe des Kegels eine Ebene auf die Grundfläche ſenkrecht, ſo iſt die Durchſchnittsfigur BCD ein Dreyeck, und in dieſer Ebene liegt der Neigungswinkel $BAC = \alpha$ der Axe gegen die Grundfläche, auf den Durchmeſſer BD der Grundfläche, worinn ſie von der Ebene CBD geſchnitten wird,

ſetzte

ſetzte man einen andern $\beta\delta$ ſenkrecht, ſo wird derſelbe auch auf der Ebene BCD ſenkrecht ſeyn. Ferner ſey AL auf der Grundfläche ſenkrecht, ſo liegt AL in der Ebene BCD, und man kann nun $A\beta$, AD, AL, für die drey Axen des Körpers annehmen, womit die drey Coordinaten parallel ſind. Demnach ſey von einem Punkt M der Kegelfläche MQ auf die Grundfläche ſenkrecht gezogen, und QP auf $A\beta$ ſenkrecht. Man ſetze $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$. Durch M lege man die Ebene bMd mit der Grundfläche parallel, welche die Axe des Kegels in H, die Ebene BCD in bd, AL aber in L ſchneide, ſo liegt L in bd. Man ziehe die gerade Linie CM, welche in der Oberfläche des Kegels liegt, und mit dem Umfang der Grundfläche in N zuſammen ſtößt. Die Ebene ACN ſchneide bMd in HM, die Grundfläche in AN, und es ſey $AB = AN = r$, $AC = b$, ſo iſt $BAC = AHL = \alpha$, $AL = MQ = x$, folglich $HL = x \cot\alpha$, $AH = x \operatorname{cosec}\alpha$. Ferner iſt $CA : GH = AN : HM$, und $CH = CA - AH$, alſo $HM = \frac{r(b - y \operatorname{cosec}\alpha)}{b}$. Man ziehe LM, AQ, und ſetze MR auf bd ſenkrecht, ſo iſt $LM = AQ = v\,(xx + yy)$. Weil ferner der Winkel $MLR = QAD$, ſo iſt $MR = AP = x$, $LR = PR = y$, und überdem $MR^2 = HM^2 - (HL + LR)^2$. Dieß giebt die Gleichung $xx = \frac{rr\,(b - x \operatorname{cosec}\alpha)^2}{bb} - (x \cot\alpha + y)^2$, oder $xx + yy = \frac{rr(b - x \operatorname{cosec}\alpha)^2}{bb} - xx \cot\alpha^2 - xyx \cot\alpha$ für den ſchiefen Kegel, und dieſe Gleichung verwandelt ſich in folgende $bb\,(xx + yy) = rr\,(b - z)^2$, wenn $\alpha = 90°$, alſo der Kegel ein gerader Kegel iſt.

8. §.

Die Gleichung für den Schnitt des ſchiefen Kegels bey jeder gegebenen Lage der Ebene des Schnitts gegen die Axe und Grundfläche des Kegels zu finden.

Aufl. Es ſey *fgk* (3. Fig.) die Ebene des Schnitts und *fk* ihr Durchſchnitt mit der Grundfläche. Man lege durch die Axe AC eine Ebene BCD auf die Grundfläche ſenkrecht, welche die Grundfläche in BD, und *fk* in E ſchneidet. Auf BD ſey AP als die Axe der Abſciſſen x ſenkrecht, und ſie ſchneide *fk* in F. Es ſey der Winkel $AFE = \psi$, der Ebene *fgk* Neigungswinkel gegen die Grundfläche des Kegels $= \phi$, und $AE = f$. Wenn nun M ein Punkt im Kegelſchnitt iſt, ſo ſey MS auf *fk* ſenkrecht, und $ES = t$, $SM = u$. Nimmt man ferner die Coordinaten y und x des Kegels mit AD und *Al* parallel, wie in 7. §. ſo hat man die Gleichung $xx + yy = \frac{rr}{bb}(b - x\,cosec\,\alpha)^2 - xx\,cot\,\alpha^2 - xyx\,cot\,\alpha$. Nach dem *bf* ſetze man $x = t\,cos\,\psi + u\,cos\,\phi\,sin\,\psi$ und $y = u\,cos\,\phi\,cos\,\psi - t\,sin\,\psi - f$, $z = u\,sin\,\phi$. Wenn man dieſe Werthe in die Gleichung des Kegels ſtatt x und y, und z, und der Kürze wegen $\frac{r}{b} = m$ ſetzt, ſo erhält man für den Kegelſchnitt die Gleichung $tt - x\,sin\,\psi\,sin\,\phi\,cot\,\alpha . tu + cos\,\phi^2 . uu - xf\,cos\,\phi\,cos\,\psi . u$

$$+ sin\,\phi^2\,cot\,\alpha^2 \qquad + zm^2\,b\,cosec\,\alpha\,sin\,\phi$$
$$+ x\,cos\,\phi\,cos\,\psi\,sin\,\phi\,cot\,\alpha \qquad - xf\,sin\,\phi\,cot\,\alpha$$
$$- m^2\,cosec\,\alpha^2\,sin\,\phi^2$$

$+ xf\,sin\,\psi . t + ff - m^2b^2 = 0$. Dieſe Linie gehört zur zweyten Ordnung, und wenn man die Coefficienten von uu, tu, und tt mit P, Q, R, bezeichnet, ſo weis man aus andern Gründen,

daß

daß der Schnitt eine Ellipſe Parabel oder Hyperbel ſey, nachdem $4PR - QQ$ poſitiv, oder $= 0$, oder negativ iſt. Es wird aber $4P.R - QQ = 4(\mathit{cof}\,\Phi + \mathit{ſin}\,\Phi\,\mathit{cof}\,\Psi\,\mathit{cot}\,\alpha)^2 - 4m^2\,\mathit{coſec}\,\alpha^2\,\mathit{ſin}\,\Phi^2$. Daher wird der Schnitt eine Ellipſe, Parabel oder Hyperbel ſeyn, nachdem

$bb\,(\mathit{cof}\,\Phi = \mathit{ſin}\,\Phi\,\mathit{cof}\,\Psi\,\mathit{cot}\,\alpha)^2 > = \text{ oder } < rr\,\mathit{coſec}\,\alpha^2\,\mathit{ſin}\,\Phi^2$

oder $b\,\mathit{cof}\,\Phi > = \text{ oder } < r\,\mathit{coſec}\,\alpha\,\mathit{ſin}\,\Phi - b\,\mathit{ſin}\,\Phi\,\mathit{cof}\,\Psi\,\mathit{cot}\,\alpha$ oder

$\frac{b}{r\,\mathit{coſec}\,\alpha - b\,\mathit{cof}\,\Psi\,\mathit{cot}\,\alpha} > = \text{ oder } < \frac{\mathit{ſin}\,\Phi}{\mathit{cof}\,\Phi}$, oder auch $\frac{b\,\mathit{ſin}\,\alpha}{r - b\,\mathit{cof}\,\Psi\,\mathit{cof}\,\alpha}$.

$> = \text{ oder } < \mathit{tang}\,\Phi$

Wenn nun die Abſciſſenlinie ES den Umfang der Grundfläche in *f* und *h* trift, ſo halbire man *fh* bey *e*, und ziehe durch A und *e* den Durchmeſſer *bd* der Grundfläche, welcher auf *fh* ſenkrecht iſt; ſo wird die Ebene *bld* durch *bd* und die Axe A*l* gelegt die Ebene des Schnitts *fgh* in der geraden Linie *eg* ſchneiden. Ueberdem ſchneidet die ſenkrechte Ebene BCD durch die Axe die Ebene des Schnitts in ES, beyde Durchſchnittslinien ſchneiden die Axe, und folglich einander ſelbſt in dem Punkt K, worinn die Ebene des Schnitts und die Axe des Kegels einander ſchneiden. Nun hat man an A ein körperliches Dreyeck, deſſen Seitenflächen EA*e*, EAK, und *e*AK ſind, deſſen Seiten und Winkel ſich bekannter maſſen wie die Seiten und Winkel ſphäriſcher Dreyecke berechnen laſſen. Weil die Ebene AEK auf der Grundfläche ſenkrecht iſt, ſo iſt dieß Dreyeck an AE rechtwinklicht, und *e*AK die Hypothenuſe. Da nun $EAe = AFE = \Psi$, $EAK = \alpha$, ſo iſt $\mathit{cof}\,e\mathrm{AK} = \mathit{cof}\,\alpha\,\mathit{cof}\,\Psi$, und wenn ε der Winkel an Ae iſt, unter welchem C*bd* die Grundfläche ſchneidet, ſo iſt $\mathit{cot}\,\varepsilon = \mathit{ſin}\,\Psi\,\mathit{cot}\,\alpha$. Ueberdem iſt auch *e* die Spitze eines körperlichen Dreyecks, deſſen Seiten $\mathrm{AeE} = 90°$ iſt, der Winkel an $e\mathrm{A} = \varepsilon$, und an $e\mathrm{E} = \Phi$. Alſo wird $\mathit{tang}\,\mathrm{EeK} = \frac{\mathit{ſin}\,\varepsilon}{\mathit{cof}\,\varepsilon\,\mathit{ſin}\,\Phi} = \frac{\mathit{tang}\,\varepsilon}{\mathit{ſin}\,\Phi} = \frac{1}{\mathit{ſin}\,\Psi\,\mathit{ſin}\,\Phi\,\mathit{cot}\,\alpha}$,

und $tang\ AeK = \frac{sin\,\Phi}{cos\,\Phi\,sin\,\varepsilon} = \frac{tang\,\Phi}{sin\,\varepsilon}$. Da nun $cosec = \sqrt{(1+cot^2)}$ $= \sqrt{(1+sin\,\psi^2\,cot\,\alpha^2)}$ so ist $sin\,\varepsilon = \frac{1}{cosec\,\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{(1+sin\,\psi^2\,cot\,\alpha^2)}}$, also $tang\,AeK = tang\,\Phi\sqrt{(1+sin\,\psi^2\,cot\,\alpha^2)} = \frac{tang\,\Phi\sqrt{(1-cos\,\alpha^2\,cos\,\psi^2)}}{sin\,\alpha}$.

Aber im Dreyeck ABC ist $tang\,AbC = \frac{b\,sin\,CAb}{b\,cos\,CAb}$, und es war $cos\,AK = cos\,CAb = cos\,\alpha\,cos\,\psi$, also hie $CAb = \sqrt{(1-cos\,\alpha^2\,cos\,\psi^2)}$, folglich wird $tang\ AbC = \frac{b\sqrt{(1-cos\,\alpha^2\,cos\,\psi^2)}}{r - b\,cos\,\alpha\,cos\,\psi}$.

Nachdem nun $tang\ Abl >=$ oder $<$ $tang\ AlK$, nachdem ist $\frac{b\,sin\,\alpha}{r - b\,cos\,\alpha\,cos\,\psi} >=$ oder $<$ $tang\,\Phi$, folglich wird der Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, nachdem $AbC >=$ oder $<$ AeK ist.

9. §.

Die Durchschnittlinie ge (3. Fig.) der Ebene des Schnitts fgh mit der Ebene brd, welche durch die Axe AC so gelegt ist, daß sie fh halbirt, ist ein Durchmesser des Kegelschnitts, und die mit fh parallelen Coordinaten sind ihm zugeordnet.

Beweis. Der Coefficient von uu in der allgemeinen Gleichung des vor. §. läßt sich so ausdrücken
$cos\,\Phi^2 + 2\,cos\,\Phi\,cos\,\psi\,sin\,\Phi\,cot\,\alpha + sin\,\Phi^2\,cot\,\alpha^2\,(sin\,\psi^2\,cos\,\psi^2) - m^2\,sin\,\Phi^2\,cosec\,\alpha^2 = (cos\,\Phi + sin\,\Phi\,cos\,\psi\,cot\,\alpha)^2 + sin\,\Phi^2\,sin\,\psi^2\,cot\,\alpha^2 - m^2\,sin\,\Phi^2\,cosec\,\alpha^2$. Man setze $cos\,\Phi + sin\,\Phi\,cos\,\psi\,cot\,\alpha = K$, $cos\,\Phi\,cos\,\psi + sin\,\Phi\,cot\,\alpha = g$, $m\,sin\,\Phi\,cosec\,\alpha = h$, $mb = r$.

Nun

Nun war im vor. §. $tang\, EeK = \frac{1}{fin\,\Phi\, fin\,\Psi\, cot\,\alpha}$; wenn man alſo den Winkel $EeK = \eta$ ſetzt, ſo wird $fin\,\Phi\ fin\,\Psi\ cot\,\alpha = cot\,\eta$. Dieſe Werthe ſetze man in die allgemeine Gleichung für den Kegelſchnitt, ſo erhält man

$tt = 2\,cot\,\eta,\ tu + (cot\,\eta^2 + kk - hh).\ uu + 2\,(rh - fg)\,u + 2ffin.\ t + ff - rr = 0.$

Nun iſt $Ee = f\,fin\,\Psi$; wenn man alſo $eS = T$ ſetzt, ſo wird $T = f\,fin\,\Psi + t$, und $t = T - f\,fin\,\Phi$. Dieß ſtatt t geſetzt giebt die Gleichung $(T - cot\,\eta.\,u)^2 + (kk - hh)\,uu + 2\,(f\,cot\,\eta\,fin\,\Psi + (7h - fg)\,u + f^2\,cof\,\Psi^2 - rr = 0$. Man ziehe MS (3. und 4. Fig.) mit eK parallel, ſo iſt der Winkel $MsS = EeK = \eta$, und dieſer Winkel iſt wenigſtens ſo lange ſpitz, als α nicht über 90° groß iſt, Φ und Ψ aber kleiner als 180° ſind, weil $cot\,\eta = fin\,\Phi\,fin\,\Psi\ cot\,\alpha$. Da nun in der Gleichung $\alpha < 90°$ angenommen iſt; ſo iſt auch η ſpitz, und s fällt zwiſchen e und S, ſo daß $es = eS - Ss$ wird. Setzt man nun $es = X$, $Ms = V$, ſo wird $u = V\,fin\,\eta$, und $sS = u\,cot\,\eta = V\,cof\,\eta$, folglich $X = T - u\,cot\,\eta$. Dieſe Werthe in die vorige Gleichung geſetzt geben

$X^2 + (kk - hh)\,fin\,\eta^2.\,V^2 + 2\,(f\,cof\,\eta\,fin\,\Psi + (rh - fg)\,fin\,\eta\,V + f^2\,cof\,\Psi^2 - rr = 0$. In dieſer Gleichung kann man die Coordinaten X und V verwechſeln. Wenn nämlich Mp mit fh parallel iſt, ſo wird $ep = V$, und $pM = X$; dann aber gehören zu jeder Abſciſſe ep zwo gleiche und entgegen geſetzte Coordinaten. Daraus folgt, daß ge ein Durchmeſſer ſey, und daß die mit fk parallelen Coordinaten ihm zugeordnet ſeyn.

10. §.

Die Größe der beyden halben Durchſchnittsmeſſer zu finden, wovon der eine in ge fällt, und der andre mit fh parallel iſt.

Aufl.

Aufl. Man ſetze der Kürze wegen A, 2B, C, ſtatt der dreyen Coefficienten in der letzten Gleichung zwiſchen X und V, ſo hat man $X^2 + A.V^2 + 2B.V + C = o$. Nun ſuche man die Werthe von V, wenn $X = d$ iſt, ſo findet man aus der Gleichung $V + \frac{2B}{A}.V = -\frac{C}{A}$ folgende Wurzeln $V = \frac{B}{A} + \frac{\sqrt{(B^2 - AC)}}{A}$. Hieraus ergiebt ſich, daß der Mittelpunkt des Kegelſchnitts um den Abſtand $-\frac{B}{A}$ von e entfernt ſey, und unterhalb e liege, wenn $\frac{B}{A}$ poſitiv iſt. Ziehet man nun durch den Mittelpunkt eine neue Abſciſſenlinie *mn* mit *fk* parallel, ſo wächſt (4. Fig.) die Ordinate $Ms = V$ um das Stück $ec = \frac{B}{A}$. Setzt man alſo die neue Ordinate $cη = Y$, ſo wird $V = Y - \frac{B}{A}$, und dieſer Werth in die obige Gleichung für den Kegelſchnitt geſetzt giebt folgende: $Y^2 = \frac{B^2 - AC}{A^2} - \frac{1}{A} X^2$. Daher iſt die Hälfte des mit *fk* parallelen Durchmeſſers $em = \frac{\sqrt{(B^2 - AC)}}{\sqrt{A}}$

$$= \frac{\sqrt{(f \sin\psi \cos\eta \pm (rk - fg) \sin\eta)^2 - (kk - hh)(f \cos\psi^2 - rr)}}{\sqrt{(kk - hh)}}$$

und die Hälfte des zugehörigen Durchmeſſers $cg = \frac{\sqrt{(B^2 - AC)}}{A} =$

$$\frac{\sqrt{(C f \sin\psi \cos\eta + (rk - fg) \sin\eta)^2 - (kk - hh)(f \cos\psi^2 - rr)}}{kk - hh}.$$

II. §.

Die Geſtalt des Kegelſchnitts zu finden, wenn die Ebene des Schnitts auf der Axe des Kegels ſenkrecht iſt.

Aufl.

Aufl. Wenn EF (3. Fig.) mit AF parallel, alſo $\psi = o$ iſt, ſo fällt e in E, und EF iſt auf BD folglich auf die Ebene BCD ſenkrecht, ſo daß nun $AEK = \phi$ wird, und $\eta = EeK = fEK = 90°$. Wenn demnach überdem der Winkel AKE (2. Fig.) $= 90°$ iſt, ſo iſt die Ebene Ff auf der Axe des Kegels ſenkrecht. Man ſetze alſo (2. Fig.) $\psi = o$, und $AKE = 90°$, ſo wird $\phi = 90° - \alpha$. Dieſe Vorausſetzungen geben $k = g = cof\psi + fin\,\phi\,cot\,\alpha = fin\,\alpha + cof\,\alpha\,cot\,\alpha = \frac{1}{fin\,\alpha} = cofec\,\alpha$, und $h = m\,cof\,\alpha\,cofec\,\alpha = m\,cot\,\alpha$. Folglich wird $A = gg - hh = cofec\,\alpha^2 - m^2\,cot\,\alpha^2$, $B = rh - fg = mr\,cot\,\alpha - f\,cofec\,\alpha$, $C = ff - rr$. Man ſetze dieſe Worte in die Gleichung $x^2 + A.V^2 + rB.V + C = o$, ſo ergiebt ſich die Gleichung

$X^2 + (cofec\,\alpha^2 - m^2\,cot\,\alpha^2)\,V^2 + 2\,(mr\,cot\,\alpha - f\,cofec\,\alpha)\,V + ff - rr = o$. oder $V^2 + \frac{2\,(mr\,cot\,\alpha - f\,cofec\,\alpha)\,V}{cofec\,\alpha^2 - m^2\,cot\,\alpha^2} = \frac{rr - ff - X^2}{cofec\,\alpha^2 - m^2\,cot\,\alpha^2}$. Nun iſt in der 2. Fig. GE eine Hauptaxe des Schnitts, und wenn c der Mittelpunkt des Schnitts iſt, ſo wird $Ec = -\frac{B}{A} = \frac{f\,cofec\,\alpha - mr\,cot\,\alpha}{cofec\,\alpha^2 - m^2\,cot\,\alpha^2} = \frac{f\,fin\,\alpha - mr\,fin\,\alpha\,cof\,\alpha}{1 - m^2\,cof\,\alpha^2}$. Nachdem alſo dieſer Ausdruck poſitiv oder negativ iſt, fällt e oberhalb oder unterhalb Ff. Nimmt man die Abſciſſen auf dem mit Ff parallelen Durchmeſſer, ſo erhält man $Y^2 = \frac{B^2 - AC}{A^2} X^2 = \frac{1}{A} X^2$ (10. §.), und im gegenwärtigen Fall wird $B^2 - AC = (rh\,fg)^2 - (gg - hh)(ff - rr) = (rg - fh)^2 = (r\,cofec\,\alpha - m\,fcot\,\alpha)^2 X^2$

Es verwandelt ſich nämlich die letzte Gleichung des 9. §. in folgende

$X^2 + kk \sin \eta^2 V^2 + 2f(\cos \eta \sin \psi - g \sin \eta) V + f^2 \cos \psi^2 - rr = 0$,

weil $k = 0$ wird. Ueberdem iſt $k = \cos \Phi + \sin \Phi \cos \psi \cot \alpha = 0$, alſo auch $\cos \Phi \cos \psi + \sin \Phi \cot \alpha - \sin \Phi \cot \alpha \sin \psi^2 = 0$. Weil nun $\sin \Phi \sin \psi \cot \alpha = \cot \eta$, ſo wird, $g - \cot \eta \sin \psi = 0$, oder $\cos \eta \sin \psi - g \sin \eta = 0$. Daher erhält man die Gleichung $X^2 + f^2 \cos \psi^2 - rr = 0$, und V wird nicht durch X beſtimmt. Aber es wird $X = \pm \sqrt{(rr - f^2 \cos \psi^2)} = \pm ef$.

13. §.

Wenn die Ebene des Schnitts auf der Axe des Cylinders ſenkrecht iſt, ſo wird die Gleichung ſo verändert $V^2 - 2f \sin \alpha . V = (rr - ff - X^2) \sin \alpha^2$. Ueberdem wird GE eine Hauptaxe des Schnitts, und wenn c der Mittelpunkt des Schnitts iſt, ſo wird $Ec = f \sin \alpha = EK$, ſo daß der Mittelpunkt in die Axe des Cylinders fällt. Setzt man alſo $Y = V - f \sin \alpha$, ſo erhält man die Gleichung $Y^2 = rr \sin \alpha^2 - X^2 \sin \alpha^2$, und es wird die Hälfte der mit Ff parallelen Axe $= r$, die Hälfte der conjugirten Axe $= r \sin \alpha$. Der ſchiefe Cylinder hat alſo die Eigenſchaft, daß alle durch ſeine Axe ſenkrecht geführten Schnitte Ellipſen werden, deren Mittelpunkte in des Cylinders Axe fallen. Man könnte daher dieſe Eigenſchaft mit H. Euler Introd. in Anal. inf. Append. Cap. III. §. 52. für die Erklärung des ſchiefen Cylinders annehmen, wenn es nicht aus andern Gründen beſſer wäre, die gewöhnliche beyzubehalten, deſſen zu geſchweigen, daß bey dieſer letzten Erklärung die Betrachtung des ſchiefen Cylinders aus den Anfangsgründen ganz wegbleiben müßte.

denn auch in eben diesem Falle beyde Hauptaxen $= o$ werden, so daß die Ellipse in einem Punkte zusammen geht. Hindurch wird also dasjenige bestätiget, was im 3. §. behauptet worden.

12. §.

Wenn in der allgemeinen Gleichung für den Kegelschnitt (8. §.) $b = \infty$, also $\frac{f'}{b} = m = o$ gesetz wird, so hat man die allgemeine Gleichung für den Schnitt eines schiefen Cylinders, dessen Axe gegen die Grundfläche unter dem Winkel $= \alpha$ geneigt ist. Die Gleichung selbst wird folgende.

$$tt - 2 \sin\phi \sin\psi \cot\alpha\, tu + \cos\phi^2 uu - 2f \cos\phi \cos\psi\, u + 2f \sin\psi\, t + ff = o.$$
$$+ 2 \cos\phi \cos\psi \sin\phi \cot\alpha \quad - 2f \sin\phi \cot\alpha \quad - rr$$
$$+ \sin\phi^2 \cot\alpha^2$$

Der Schnitt ist allemal eine Ellipse, weil $(\cos\phi + \sin\phi \cos\psi \cot\alpha)^2$ allemal positiv ist. In dem Fall, wenn dieser Ausdruck $= o$ wäre, hätte man $\cot\phi = -\cos\psi \cot\alpha$. Aber

$$tang\ AeK = \frac{tang\,\phi \sqrt{(1 - \cos\alpha^2 \cos\psi^2)}}{\sin\alpha} = \frac{-\sqrt{(1 - \cos\alpha^2 \cos\psi^2)}}{\cos\psi \cos\alpha},$$

und $tang\ Abc = \frac{\sqrt{(1 - \cos\alpha^2 \cos\psi^2)}}{\cos\psi \cos\alpha}$, folglich $AeK = AbC$. Dies ist der Fall, da im Kegel der Schnitt eine Parabel seyn würde, woraus hier ein System zwoer grader und paralleler Linien wird, wie den Eigenschaften des Cylinders gemäß ist, und die Gleichung am kürzesten ergiebt, wenn man wie im 9. §. den Anfangspunkt der Abscissen in e, und die Ordinaten mit gd parallel nimmt.

[illegible] verwandelt sich nämlich die letzte Gleichung des 9. §. [illegible]

[illegible] $\sin\psi - g \sin\eta) V + f^2 \cos\psi^2 - rr = 0$, [illegible] Ueberdem ist $k = \cos\phi + \sin\phi \cos\psi \cot\alpha$ [illegible] $\cos\psi + \sin\phi \cot\alpha - \sin\phi \cot\alpha \sin\psi^2 = 0$. [illegible] $\sin\psi \cot\alpha = \cot\eta$, so wird, $g - \cot\eta \sin\psi = 0$, [illegible] $g \sin\eta = 0$. Daher erhält man die Gleichung [illegible] $rr = 0$, und V wird nicht durch X bestimmt, [illegible] $X = \pm \sqrt{rr - f^2 \cos\psi^2}) = \pm ef$.

13. §.

Wenn die Ebene des Schnitts auf der Axe des Cylinders [illegible] ist, so wird die Gleichung so verändert $V^2 - 2f \sin\alpha$. [illegible] $ff - X^2) \sin\alpha^2$. Ueberdem wird GE eine Haupt[illegible] des Schnitts, und wenn c der Mittelpunkt des Schnitts ist, so wird $Ec = f \sin\alpha = EK$, so daß der Mittelpunkt in die Axe des Cylinders fällt. Setzt man also $Y = V - f \sin\alpha$, so erhält man die Gleichung $Y^2 = rr \sin\alpha^2 - X^2 \sin\alpha^2$, und es wird die Hälfte der mit Ef parallelen Axe $= r$, die Hälfte der conjugirten Axe $= r \sin\alpha$. Der schiefe Cylinder hat also die Eigenschaft, daß alle durch seine Axe senkrecht geführten Schnitte Ellipsen werden, deren Mittelpunkte in des Cylinders Axe fallen. Man könnte daher diese Eigenschaft mit H. Euler Introd. in Anal. inf. Append. Cap. III. §. 52. für die Erklärung des schiefen Cylinders annehmen, wenn es nicht aus andern Gründen besser wäre, die gewöhnliche beyzubehalten, dessen zu geschweigen, daß bey dieser letzten Erklärung die Betrachtung des schiefen Cylinders aus den Anfangsgründen ganz wegbleiben müßte.

Uebri-

Uebrigens erhält man aus dem 10. §. $B = f(\cos\eta \sin\psi - g \sin\eta)$, $A = (\cos\phi + \sin\phi \cos\psi \cot\alpha)^2 = kk$, $C = f^2 \cos\psi^2 - rr$. Rechnet man also die Abscissen vom Mittelpunkt, so wird die allgemeine Gleichung diese;

$$Y^2 = \frac{f^2(\cos\eta \sin\psi - g \sin\eta)^2 - kk(f^2 \cos\psi^2 - rr)}{K^4} \cdot \frac{1}{K^2} X^2$$

Die Hälfte des mit fh parallelen Durchmessers ist $= \frac{\sqrt{(f^2 \cos\eta \sin\psi - g \sin\eta)^2 - kk(f^2 \cos\psi^2 - rr)}}{K}$, und man hat die Hälfte des zugehörigen Durchmessers, wenn man jenen Ausdruck mit $\frac{1}{K}$ multiplicirt, da denn η der Conjugationswinkel ist, und $\cot\eta = \sin\phi \sin\psi \cot\alpha$.

14. §.

Wenn die Gestalt des Kegels gegeben ist, also r, b, und α, bekannt sind, zu finden, wie groß die Winkel ϕ und ψ genommen werden müssen, damit der Kegelschnitt ein Kreis werde.

Aufl. Die Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts mit derjenigen Ebene durch die Axe, welche die Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts und der Grundfläche halbirt, ist allemal ein Durchmesser des Kegelschnitts, und die ihm zugehörigen Ordinaten sind mit der Grundfläche parallel. So lange nun der Conjugationswinkel ein schiefer Winkel ist, kann der Schnitt kein Kreis seyn, weil der Kreis keine solche zusammengehörige Durchmesser hat, die sich unter einem schiefen Winkel schneiden. Damit also der Kegelschnitt ein Kreis werde, wird allemal erfordert, daß der Conjugationswinkel $EsK = \eta = 90°$ sey. Also muß $\cot\eta = \sin\phi \sin\psi$

sen vom Mittelpunkt auf der mit Ef parallelen Axe gerechnet; und wenn c der Mittelpunkt ist, so hat man $Ec = -\frac{B}{A} = \frac{fg - rh}{gg - hh}$.

Setzt man aus dem 9. §. statt g und h ihre dortigen Werthe, so wird $\frac{(rg - fh)^2}{(gg - hh)^2} = \frac{(r(\cos\Phi + \sin\Phi \cot\alpha) - fm \sin\Phi \operatorname{cosec}\alpha)^2}{(1\cos\Phi + \sin\Phi\cot\alpha)^2 - m^2\sin\Phi^2\operatorname{cosec}\alpha^2)^2}$

$= \frac{(r\sin(\alpha+\Phi) - fm\sin\Phi)^2 \sin\alpha^2}{(\sin(\alpha+\Phi)^2 - m^2\sin\Phi^2)^2}$, und $\frac{1}{gg - hh} = \frac{\sin\alpha^2}{\sin(\alpha+\Phi)^2 - m^2\sin\Phi^2}$. Folglich erhält man die Gleichung $Y^2 = \frac{(r\sin(\alpha+\Phi) - fm\sin\Phi)^2\sin\alpha^2}{(\sin(\alpha+\Phi)^2 - m^2\sin\Phi^2)^2} - \frac{\sin\alpha^2}{\sin(\alpha+\Phi)^2 - m^2\sin\Phi^2}X^2$.

Ueberdem wird $Ec = \frac{f(\cos\Phi + \sin\Phi\cot\alpha) - rm\sin\Phi\operatorname{cosec}\alpha}{(\cos\Phi + \sin\Phi\cot\alpha)^2 - m^2\sin\Phi^2\operatorname{cosec}\alpha^2} = \frac{f\sin\alpha\sin(\alpha+\Phi) - rm\sin\Phi\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Phi)^2 - m^2\sin\Phi^2}$

Wenn nun $gg - hh = 1$, also der Schnitt ein Kreis ist, so wird $Y^2 = \frac{(r\sin(\alpha+\Phi) - fm\sin\Phi)^2}{\sin\alpha^2} - X^2$, weil $\sin(\alpha+\Phi)^2 - m^2\sin\Phi^2 = \sin\alpha^2$ wird, also ist der Halbmesser des Kreises $= \frac{r\sin(\alpha+\Phi) - fm\sin\Phi}{\sin\alpha}$ und $Ec = \frac{f\sin(\alpha+\Phi) - rm\sin\Phi}{\sin\alpha}$, da denn $\Phi = ABC - ADC$ seyn muß.

16. §.

Wenn die Axe des Kegels $b = \infty$, also aus dem Kegel ein Cylinder wird, so ist $m = o$, und man hat für den auf die Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche senkrechten

Schnitt

die Gleichung $Y^2 = rr - \frac{\sin x^2}{\sin(\alpha+\phi)^2} X^2$, und $Ec =$

$\phi)^2$. Damit der Schnitt ein Kreis werde, muß *tang*
tang 2α, also $\phi = 180° - 2\alpha$ seyn. Folglich wird $EKA =$
$\phi - \alpha = \alpha$, und $EK = EA = f$. Nun wird ferner $\alpha + \phi =$
α, also $\sin(\alpha+\phi) = \sin\alpha$, und dies giebt $Ec = f$. Dem-
fällt der Mittelpunkt des Kreises in die Axe des Cylinders,
ein Halbmesser ist dem Halbmesser der Grundfläche gleich.
ird nämlich die Gleichung so verändert $Y^2 = rr - X^2$.

17. §.

Dafern die Axe des Kegels dem Halbmesser seiner Grund-
e gleich, also $r = b$ und $m = 1$ ist; so liegen die drey Punkte
C, D. im Umfang eines Halbkreises, über BD, folglich ist
$D = 90°$, und $ADC = 90° - ABC$. Wird nun $\phi = ABC -$
C genommen, so ist $\phi = ABC - 90°$, $AKE = 180° - (\alpha+\phi)$,
$\alpha = 180° - 2ABC$, folglich $AKE = 90°$, und der Schnitt ist
f des Kegels Axe senkrecht. Wenn demnach $r = b$ ist, so giebt
er auf die Axe senkrechte Schnitt einen Kreis. Da nun in eben
esem Fall $\alpha + \phi = 90°$ ist, so wird $\sin\phi = \cos\alpha$, und $\cos\phi =$
$\sin\alpha$. Demnach fällt der Mittelpunkt in c, wenn $Ec = \frac{f - r\cos\alpha}{\sin\alpha}$
genommen wird, und der Halbmesser des Kreises wird $= \frac{r - f\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Fällt überdem in eben diesem Fall der Mittelpunkt der
Grundfläche in die Ebene des Schnitts, so gehet Ff durch A, und
ist $AE = f = o$, also $Ec = -r\cot\alpha$, und der Halbmesser des
Kreises $= \frac{r}{\sin\alpha} = r\,\mathrm{cosec}\,\alpha$.

18. §.

Dieß ist der Fall der stereographischen Projection der Meridiane der Kugel, wenn die Tafel selbst ein Meridian ist, wofür man gewöhnlich den ersten Meridian annimmt, und das Auge im Pol dieses Meridians stehet. (Man vergleiche nun hiemit die Abhandlung von den Projectionen der Kugel, worauf ich in der Folge allemal der Kürze wegen unter dem Namen der vorigen Abhandlung verweisen werde.) Wenn der Meridian PLQ (6. Figur der vorigen Abhandlung) die Tafel GPHQ unter dem Winkel GTF = CTl schneidet, so ist dieser Winkel = 90° — OTl, und OTl ist der Neigungswinkel der Axe des optischen Kegels gegen seine Grundfläche, der in der bisherigen Ausführung = α gesetzt ist. In der vorigen Abhandlung war GTF = γ, also ist hier $\cot \alpha = \tang \gamma$, und $\operatorname{cosec} \alpha = \sec \gamma$. Dies giebt den Halbmesser der Projection = $r \sec \gamma$, und seinem Abstand von PQ, oder TC = $-r \tang \gamma$, wie im 16. §. voriger Abhandlung.

19. §.

Die stereographische Horizontal-Projection der Meridiane (21. §. der vorigen Abhandlung) gehört ebenfalls hieher, wenn die Tafel der Horizont des Punkts (5. Fig.) Z ist, und das Auge im Nadir stehet. Man lege durch OT als die Axe des Kegels eine Ebene Obd auf den Meridian $bpdq$ als des Kegels Grundfläche senkrecht, und die Durchschnittslinie mit dem Meridian sey bd; so ist OTb der Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche, welcher bisher = α gesetzt ist, und sein Maas ist der Bogen Ob eines grösten Kreises der Kugel. Wenn nun, wie im 21. §. der vorigen Abhandlung, die Breite des Orts Z = λ und der Stundenwinkel LpZ = ϕ gesetzt wird, so ist im sphärischen Dreyeck Obq die Seite Ob = α, Oq = 90° — λ und der Winkel

Oqb

$Oqb = LpZ = \Phi$. Bey b aber ist ein rechter Winkel, folglich wird $\sin\alpha = \cos\lambda \sin\Phi$, und $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\cos\lambda \sin\Phi} = \sec\lambda \operatorname{cosec}\Phi$. Dieß giebt den Halbmesser der Projection $r \operatorname{cosec}\alpha = r \sec\Phi \operatorname{cosec}\lambda$, wie im 21. §. voriger Abhandlung.

20. §.

Um auch die Lage des Mittelpunkts C der Projection auf der Tafel zu finden schließe man so. Die Ebene Obd schneide die Tafel in TG, so ist G ein Scheitel des Kegelschnitts, wenn G in Od liegt. Ueberdem sey Nn die Durchschnittslinie der Tafel und der Grundfläche des Kegels, so ist TG auf Nn senkrecht, und der Mittelpunkt C liegt in GT. Um ihn zu finden, muß man $TC = -r\cot\alpha$ nehmen (17. §.). Es war aber $\operatorname{cosec}\alpha = \sec\lambda \operatorname{cosec}\Phi$, also wird $\cot\alpha = \sqrt{(\sec\lambda^2 \operatorname{cosec}\Phi^2 - 1)}$, und $TC = -r\sqrt{(\sec\lambda^2 \operatorname{cosec}\Phi^2 - 1)}$. Weil nun $\sec\lambda^2 \operatorname{cosec}\Phi^2 - 1 = \operatorname{cosec}\Phi^2 + \operatorname{tang}\lambda^2 \operatorname{cosec}\Phi^2 - 1 = \frac{1 + \operatorname{tang}\lambda^2 - \sin\Phi^2}{\sin\Phi^2} = \frac{\operatorname{tang}\lambda^2 + \cos\Phi^2}{\sin\Phi^2}$

$= \frac{\operatorname{tang}\lambda^2(\sin\Phi^2 + \cos\Phi^2) + \cos\Phi^2}{\sin\Phi^2} = \frac{\operatorname{tang}\lambda^2 \sin\Phi^2 + \sec\lambda^2 \cos\Phi^2}{\sin\Phi^2}$

$= \frac{\operatorname{tang}\lambda^2 \operatorname{tang}\Phi^2 + \sec\lambda^2}{\operatorname{tang}\Phi^2}$; so wird $TC = -r\frac{\sqrt{(\operatorname{tang}\lambda^2 \operatorname{tang}\Phi^2 + \sec\lambda^2}}{\operatorname{tang}\Phi^2}$. Ferner ist das sphärische Dreyeck BpN bey B rechtwinklicht, und die Seite $Bp = \lambda$, der Winkel $BpN = \Phi$, folglich $\operatorname{tang} BN = \sin\lambda \operatorname{tang}\Phi = \cot BTG = \cot DTC$. Das giebt $\sin DTC = \frac{1}{\sqrt{(1 + \sin\lambda^2 \operatorname{tang}\Phi^2)}} =$

$\sqrt{\frac{1 : \cos\lambda^2}{1 : \cos\lambda^2 + \operatorname{tang}\lambda^2 \operatorname{tang}\Phi^2}} = \frac{\sec\lambda}{\sqrt{(\sec\lambda^2 + \operatorname{tang}\lambda^2 \operatorname{tang}\Phi^2}}$,

und $cof DTC = \frac{fin\,\lambda\, tang\,\phi}{\sqrt{(1 + fin\,\lambda^2\, tang\,\phi^2}} =$

$\frac{tang\,\lambda\, tang\,\phi}{\sqrt{(fec\,\lambda^2 + tang\,\lambda^2 tang\,\phi^2)}}$. Man ſetze nun CD auf BT ſenkrecht, ſo iſt $DC = TC\, fin\, DTC = -\frac{r\, fec\,\lambda}{tang\,\phi}$, und $DT = TC\, cof DTC = -r\, tang\,\lambda$, beydes wie im 21. §. voriger Abhandlung.

21. §.

Wenn die Ebene des Kegelſchnitts nicht allein auf der Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche ſenkrecht iſt, ſo hat man $\psi = o$, und $\phi = 90°$. Damit aber der Kegelſchnitt ein Kreis werde, muß $tang\,\phi = \frac{fin\,2\,\alpha}{m^2 - cof\,2\,\alpha}$ ſeyn, oder $cot\,\phi = \frac{m^2 - cof\,2\,\alpha}{fin\,2\,\alpha}$. Demnach wird bey gegenwärtiger Vorausſetzung $\frac{m^2 - cof\,2\,\alpha}{fin\,2\,\alpha} = o$, und $m^2 = cof\,2\,\alpha$, oder $\frac{rr}{bb} = cof\,\alpha^2 - fin\,\alpha^2$, folglich $rr + bb\, fin\,\alpha^2 = bb\, cof\,\alpha^2$. Ueberdem giebt dieſe Vorausſetzung $fin(\alpha + \phi) = cof\,\alpha$, alſo den Halbmeſſer der Projection $= \frac{r\, cof\,\alpha - fm}{fin\,\alpha}$, und $Ec = \frac{f\, cof\,\alpha - r\, m}{fin\,\alpha}$. Geht überdem der Schnitt durch den Mittelpunkt der Grundfläche, ſo iſt $f = o$, alſo der Halbmeſſer des Schnitts $= \frac{r\, cof\,\alpha}{fin\,\alpha} = r\, cot\,\alpha$, und $Ec = -\frac{r\, m}{fin\,\alpha} = -\frac{r\, r}{b\, fin\,\alpha}$.

22. §.

Dieſer letzte Fall findet ſeine Anwendung bey der ſtereographiſchen Projection der Parallelkreiſe des Aequators auf einem Meridian als der Tafel, wenn das Auge im Pol dieſes Meridians ſtehet. Es ſey in der 9. Fig. zur vorigen Abhandlung wo DL*d* einen Parallelkreis vorſtellt, dieſes Parallelkreiſes Halbmeſſer $= r$, der Kugel Halbmeſſer $= \rho$. Wenn nun *e* ſein Mittelpunkt iſt, und man zichet O*e* als die Axe des optiſchen Kegels, ſo iſt der Neigungswinkel dieſer Axe gegen die Grundfläche $= eOT = \alpha$, und $Oe = b$. Ferner iſt $Te = b \sin\alpha$, $OT = \varrho = b \cos\alpha$, und $\varrho\varrho = Te^2 + rr$, alſo $bb\cos\alpha^2 = bb\sin\alpha^2 + rr$, wie erfordert wird, damit die Projection ein Kreis werde. Ueberdem geht die Tafel durch den Mittelpunkt des Parallelkreiſes, alſo wird der Halbmeſſer der Projection $= r\cot\alpha = \frac{r\,OT}{Te}$. Wenn nun die Breite des Parallelkreiſes $= \psi$ iſt, ſo wird $Te = \varrho\sin\psi$, und $r = \varrho\cos\psi$, alſo $\frac{r}{Te} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \cot\psi$, folglich iſt der Halbmeſſer der Projection $= \varrho\cot\psi$. Weiter wird $Ec = -\frac{rr}{b\sin\alpha} = \frac{\varrho\varrho\cos\psi^2}{\varrho\sin\psi} = -\varrho\cos\psi\cot\psi$. Da nun $Te = \varrho\sin\psi$, ſo wird $Tc = \varrho(\sin\psi + \cos\psi\cot\psi) = \varrho \text{X} \frac{\sin\psi^2 + \cos\psi^2}{\sin\psi} = \varrho\,\mathrm{cosec}\,\psi$, welches mit dem 19. §. der vorigen Abhandlung übereinſtimmet.

23. §.

Bey der ſtereographiſchen Horizontal-Projectionen der Parallelkreiſe des Aequators läſt ſich die bisherige Theorie (6. Fig.) ſo anwenden. Man ziehe OM, OC, und ON, wenn MFN*f* der

Parallelkreis und C sein Mittelpunkt ist; so ist OC die Axe des optischen Kegels, und der Parallelkreis die Grundfläche. Die Ebene des Meridians OBZβ ist die Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche, und der Neigungswinkel selbst ist OCN = α. Auf der Ebene dieses Neigungswinkels steht die Tafel BFβf senkrecht, und sie schneidet die Grundfläche des Kegels unter dem Winkel TEM = ψ. Weil nun TC auf MN senkrecht ist, und auch ETZ = 90°, so ist CTZ = TEC = ψ, und OTC = 180° — ψ, so wie TCO = 90° — α, folglich TOC = 180° — OTC — TCO = α + ψ — 90°. Man setze CO = b, und CM = r, so hat man *sin* OTC : b = *sin* TCO : TO, also $TO = \frac{b \sin TCO}{\sin OTC} = \frac{b \cos \alpha}{\sin \psi} = TM$. Ferner $\sin OTC : b = \sin TOC : TC$, also $TC = \frac{b \sin TOC}{\sin OTC} = \frac{b \cos(\alpha+\psi)}{\sin \psi}$. Aber $TM^2 = TC^2 + CM^2$ also $\frac{bb \cos \alpha^2}{\sin \psi^2} = \frac{bb \cos(\alpha+\psi)^2}{\sin \psi^2} + rr$. Hieraus folgt $bb \cos \alpha^2 = bb(\cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \sin \psi) + rr \sin \psi^2$, oder $bb \cos \alpha^2 = bb(\cos \alpha^2 \cos \psi^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \psi \cos \psi + \sin \alpha^2 \sin \psi^2) + rr \sin \psi^2$. Wenn man nun $1 - \sin \psi^2$ statt $\cos \psi^2$ schreibt, so erhält man ferner $2 bb \sin \alpha \cos \alpha = rr + bb \sin \alpha^2 - bb \cos \alpha^2) \times tang \psi$, folglich $tang \psi = \frac{bb \sin 2\alpha}{rr - bb \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{m^2 - \cos 2\alpha}$. Demnach ist vermöge des 14. §. der Schnitt ein Kreis.

24. §.

Der Halbmesser dieses Kreises ist vermöge des 15. §. $= \frac{r \sin \alpha + \phi - fm \sin \phi}{\sin \alpha} = \frac{r(b \sin \alpha + \phi - f \sin \phi)}{b \sin \alpha}$, und wenn man

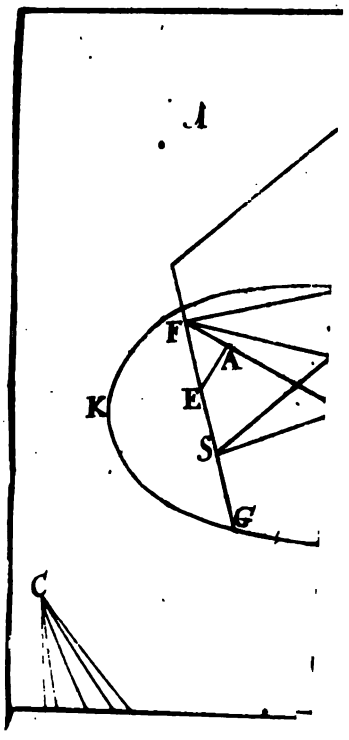
f sin

in der Linie KT den Abstand $Ec = \frac{f \sin(\alpha+\Phi) - r\, m \sin\Phi}{\sin\alpha}$ $= \frac{b f \sin(\alpha+\Phi) - rr \sin\Phi}{b \sin\alpha}$ nimmt, so ist c der Mittelpunkt der Projection. Es sey der Kugel Halbmesser $= \rho$, so ist $\varrho = \frac{r}{\cos\Psi}$. Ueberdem ist der Winkel $OKT = 180° - (\alpha+\Phi)$, wenn nemlich K der Punkt ist, worinn OC von der Tafel geschnitten wird. Daher ist im Dreyeck OKT die Seite $OK = \frac{\varrho}{\sin(\alpha+\Phi)}$, im Dreyeck ECK aber die Seite $KC = \frac{f \sin\Phi}{\sin(\alpha+\Phi)}$, folglich $OK + KC = b = \frac{\varrho + f \sin\Phi}{\sin(\alpha+\Phi)}$, und $f \sin\Phi = b \sin(\alpha+\Phi) - \rho$. Dies statt $f \sin\Phi$ gesetzt giebt den Halbmesser der Projection $= \frac{\rho r}{b \sin\alpha}$. Nun war im 28. §. der vorigen Abhandlung die Breite des Orts $Z = \Phi$, und des Parallelkreises Breite $= \Psi$. Daher ist der Bogen $ON = \Psi + \Phi$, und $ZM = \Psi - \lambda$. Im Dreyeck OCN aber ist die Seite $ON = 2\varrho \sin\frac{1}{2}(\Psi+\lambda)$ der Winkel $ONM = \frac{1}{2}(180° - (\Psi - \lambda)) = 90° - \frac{1}{2}(\Psi - \lambda)$ und $OCN = \alpha$. Folglich hat man im Dreyeck OCN die Proportion $b : \cos\frac{1}{2}(\Psi - \lambda) = 2\Phi \sin\frac{1}{2}(\Psi+\lambda) : \sin\alpha$, und diese giebt $b \sin\alpha = b \sin\alpha = 2\varrho \cos\frac{1}{2}(\Psi+\lambda) = \varrho(\sin\Psi + \sin\lambda)$. Daher wird der Halbmesser der Projection $= \frac{\rho}{\sin\Psi + \sin\lambda} = \frac{\rho \cos\Psi}{\sin\Psi + \sin\lambda}$.

Ferner ist $b f \sin(\alpha+\Phi) = ff \sin\Phi + f\rho$, also $Ec = \frac{(ff - rr)\sin\Phi + f\rho}{b \sin\alpha}$. Man hat überdem $(CM + CE)(CM - CE) =$

$(T\beta + TE)(T\beta - TE)$, oder $rr - ff = \varrho\varrho - TE^2$. Dieß giebt $Ec = \frac{(TE^2 - \rho\rho)\,\mathit{sin}\,\Phi + f\varrho}{b\,\mathit{sin}\,\alpha}$. Es iſt aber $TE = \frac{\rho\,\mathit{sin}\,\Psi}{\mathit{sin}\,\Phi}$, alſo $(TE^2 - \varrho\varrho)\,\mathit{sin}\,\Phi = \frac{\varrho^2\,\mathit{sin}\,\Psi^2 - \rho^2\,\mathit{sin}\,\Phi^2}{\mathit{sin}\,\Phi}$; ferner $\varrho\,\mathit{sin}\,\Psi = CT = f\,\mathit{tang}\,\Phi$, folglich $f = \rho\,\mathit{sin}\,\Psi\,\mathit{cot}\,\Phi$ und $Ec = \frac{\rho^2\,\mathit{sin}\,\Psi\,(\mathit{sin}\,\Psi + \mathit{cos}\,\Phi)}{b\,\mathit{sin}\,\alpha\,\mathit{sin}\,\Psi} - \frac{\Phi\,\mathit{sin}\,\varrho^2}{b\,\mathit{sin}\,\Phi}$. Iſt nun ÆQ die Durchſchnittslinie des Aequators mit dem Meridian, ſo iſt $QTZ + CTZ = 90° = \lambda + \Phi$, alſo $\mathit{sin}\,\Phi = \mathit{cos}\,\lambda$, und $\mathit{cos}\,\Phi = \mathit{sin}\,\lambda$. Ueberdem war $b\,\mathit{sin}\,\alpha = \rho\,(\mathit{sin}\,\Psi + \mathit{sin}\,\lambda)$, alſo findet man $Ec = \frac{\varrho\,\mathit{sin}\,\Psi}{\mathit{sin}\,\Phi} - \frac{\rho\,\mathit{cos}\,\lambda}{\mathit{sin}\,\Psi + \mathit{sin}\,\lambda} = TE - \frac{\rho\,\mathit{cos}\,\lambda}{\mathit{sin}\,\Psi + \mathit{sin}\,\lambda}$, und daraus folgt $TE - Ec = Tc = \frac{\rho\,\mathit{cos}\,\lambda}{\mathit{sin}\,\Psi + \mathit{sin}\,\lambda}$, welches wiederum alles mit dem 28. §. der vorigen Abhandlung übereinſtimmet.

W. J. G.


A
F
A
K
E
S
G
C

W. J. G.

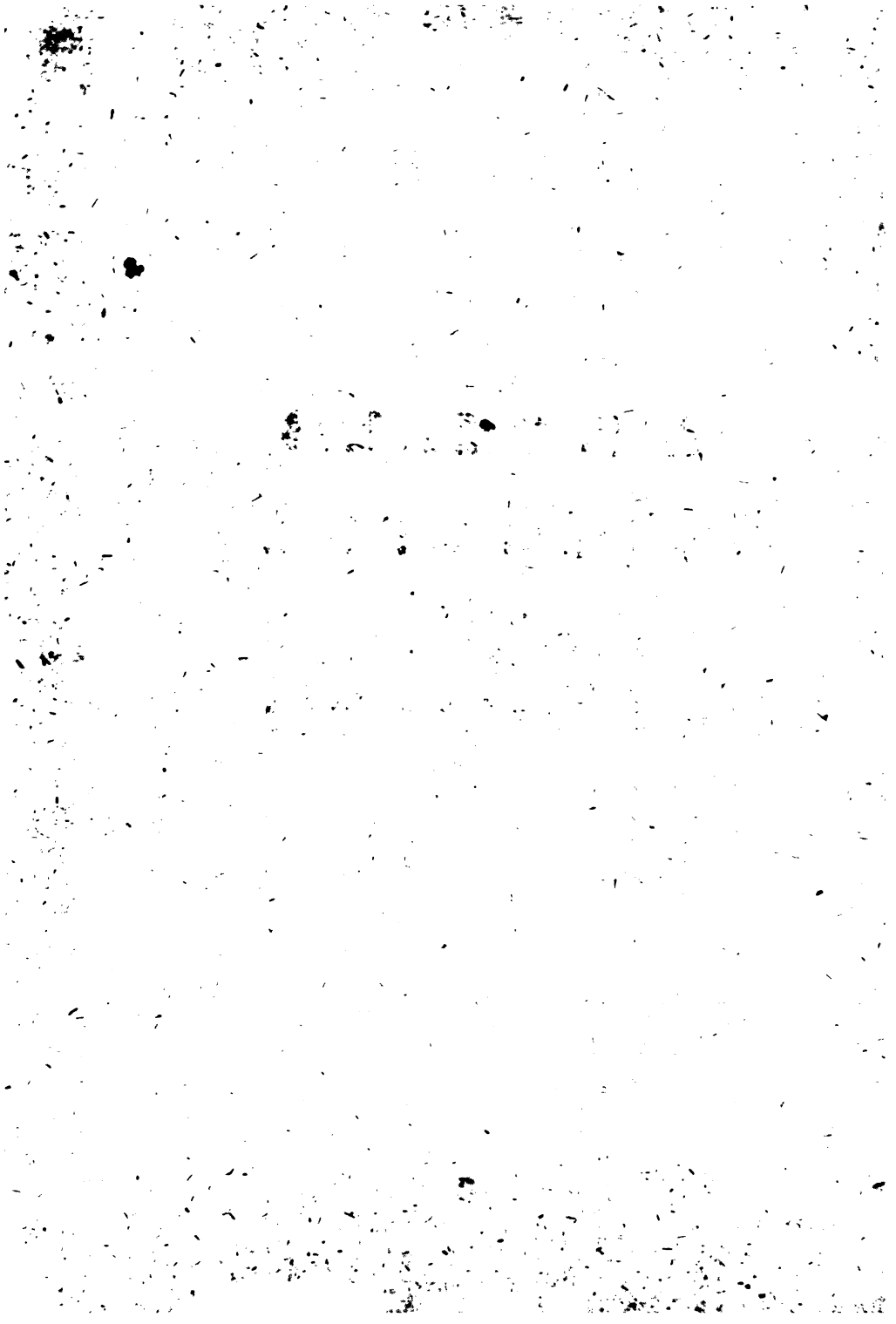
W. J. G. Karstens

Abhandlung

von der

Archimedeischen

Wasserschraube.



Von der Archimedeiſchen Waſſerſchraube.

1. §.

Herr Leonh. Euler hat im V. Theil der Comment. Nov. Petrop. eine Theorie der Waſſerſchraube vorgetragen, welche auf die nunmehro bekannten neuen Erweiterungen der Hydraulik gebauet iſt; er hat die Rechnungen darüber ſo weit getrieben, als es die Schwierigkeiten der Integrationen, die dabey vorkommen, zulaſſen: iſt aber genöthiget geweſen, die Unterſuchung abzübrechen, weil er kein Mittel fand, diejenige Differentialgleichung zu integriren, woraus die Geſchwindigkeit des Waſſers in der um die Spindel gewundenen Röhre gefunden werden müſte. Nach der Zeit hat die königliche Akademie der Wiſſenſchaften zu Berlin die Preisfrage aufgegeben, wie eine Waſſerſchraube am vortheilhafteſten anzuordnen ſey, und ſie hat im Jahr 1766. dem Herrn Hennert den Preis zuerkannt. Der Herr Hennert

gründet in der Preisschrift seine Rechnungen mit Herrn Euler auf einerley Differentialgleichung, und scheint zu glauben, daß er die erwehnte Geschwindigkeit des Wassers in der Wasserschraube der Theorie gemäß richtig gefunden habe. Herr Hennert müste demnach eine wichtige bisher noch unbekannt gewesene Methode zu integriren erfunden haben, wenn er dieses wirklich geleistet hätte: sein Vortrag aber hat meine Erwartung gar nicht erfüllet, er scheint mir vielmehr sehr wichtigen Erinnerungen ausgesetzt zu seyn, und nach meiner Ueberzeugung ist die Preisfrage in der Hauptsache unbeantwortet geblieben. Deswegen glaube ich, daß es nicht ohne Nutzen seyn werde, wenn ich in diesem Aufsatz zeige, wieweit man in der Theorie von dieser Maschine eigentlich gekommen sey; und wenn ich zugleich diejenigen Formuln entwickele, woran man sich bey der Berechnung und Anordnung einer Wasserschraube mit ziemlicher Sicherheit so lange halten kann, bis man Mittel gefunden hat, die Schwierigkeiten der Theorie zu überwinden.

2. §.

Es wird nicht nöthig seyn, daß ich mich umständlich mit einer Beschreibung von der Gestalt der Wasserschraube aufhalte. Das Wesentliche davon besteht bekanntermassen darinn, daß eine hohle Röhre um einen Cylinder so geführt wird, daß ihre centrische Linie die Gestalt einer Schraubenlinie bekömmt. Uebrigens finde ich nicht undienlich zu erinnern, daß es nach Leupolds Urtheil im Theatro Machin. Hydraul. P. I. IV. Cap. 67. §. schwer sey, eine bleyerne Röhre in der Gestalt einer Schraubenlinie um die Spindel zu führen. Deswegen ist es auch wohl gewöhnlich, daß man die Wasserschraube inwendig ohngefehr wie eine Wendeltreppe zurichtet, wovon man a. a. O. Zeichnungen findet, so wie auch Vorschriften gegeben werden, wie alles aus hölzernen Stücken,

cken, die hier auch Schaufeln heissen, gehörig zusammengesetzt, und hiernächst mit eisernen Reifen verbunden werden kann. Ferner bemerke ich noch, daß um eine und eben dieselbe Spindel zwey, auch wohl drey verschiedene Röhren geführt werden können, worauf sich die Eintheilung in einfache, doppelte und dreyfache Wasserschrauben gründet. Indessen ist es nur nöthig, die einfache Schnecke zu betrachten, weil dasjenige, was von dem einem Schneckengang erwiesen wird, hiernächst ohne Schwierigkeit auf die übrigen angewandt werden kann.

3. §.

Es sey nun ABCD die Spindel (1. Fig.) in einer, wie gewöhnlich, gegen den Horizont geneigten Lage, und AETGHC sey die centrische Linie der um die Spindel geführten Röhre. Das Rechteck ABCD sey ein verticaler Schnitt durch die Axe Oo, und durch B sey BK in dieser Verticialfläche horizontal gezogen, so ist CBK der Neigungswinkel der Spindel gegen den Horizont, BA ist der Durchmesser der untern Grundfläche, und der Punct A liegt unter allen Puncten im Umfang der untern Grundfläche am höchsten über eine durch B horizontal liegende Ebene. Die Figur ist nun so gezeichnet, daß der unterste Anfangspunct der Schraubenlinie ebenfalls in A fällt. Steht nun das Wasser bis an *hi*, so kann bey dieser Stellung der Spindel kein Wasser in A hinein treten, dafern die Oefnung A höher als der Wasserpaß *hi* liegt. Beym Umlauf der Spindel durchläuft die untere Oefnung A den Umfang des Kreises A*a*BPA, und bey jedem Umlauf wird diese untere Oefnung unter Wasser seyn, so lange sie in dem Bogen *a*BP*a* bleibt, wenn man annimmt, daß *aa* die Durchschnittslinie der Wasserfläche mit der Grundfläche der Spindel sey, so wie *hi* die Durchschnittslinie eben der Wasserfläche mit der Verticalflä-

che ABKCD iſt. Weil die Waſſerfläche ſowohl, als auch die Ebene AαBα beyde auf ABKCD ſenkrecht ſind, ſo iſt αα auf ABKCD ſenkrecht, folglich auch auf AB und *hi*, ſo daß die Bogen Aα und Aα, imgleichen Bα und Bα gleich groß ſind. Man ſtelle ſich nun die Verticale Ebene DABKC unbeweglich vor, und nehme an, die Spindel drehe ſich einmal ſo um, daß die untere Oefnung der Schnecke von A durch α, B, P bis wieder nach A laufe; ſo wird dieſe untere Oefnung unter Waſſer ſeyn, ſo lange ſie in dem Bogen αBPα bleibt, und es iſt aus den Geſetzen der Hydroſtatick ſchon begreiflich, daß durch die untere Oefnung, ſo lange ſie unter Waſſer bleibt, das Waſſer in die Schnecke hinein dringen werde. Nur muß man hiebey zum Grunde ſetzen, daß die Schnecke nicht zu ſchnell umlaufe, damit das Waſſer Zeit genug behalte, in die Röhre hinein zu treten. Wenn nun die Schnecke in die Lage gekommen iſt, welche die 2. Figur vorſtellt, wenn die untere Oefnung den Bogen AbBα durchlaufen hat, und bey α wieder über das Waſſer herauf ſteigt, der Bogen α*Mf* aber ſich in eben dieſem Augenblick nah unter dem Waſſer befindet; ſo iſt derſelbe jetzt mit Waſſer angefüllt. Es muß demnach nun unterſucht werden, unter welchen Umſtänden diejenige Menge Waſſer, welche bis dahin in die Röhre hinein getreten iſt, beym fernern Umlauf darinn bleiben, und nach und nach höher ſteigen werde.

4. §.

Es iſt der Winkel gegeben, unter welchem die Schraubenlinie den Umfang der Spindel ſchneidet, nebſt dem Neigungswinkel der Axe der Spindel gegen den Horizont, die untere Oefnung befindet ſich an ihrer höchſten Stelle bey *A*: man ſoll die Höhe eines gegebenen Puncts *M* der Schraubenlinie über eine durch *B* horizontal gelegte Ebene finden.

Aufl.

Aufl. Es sey MP mit der Axe (1. Fig.) der Spindel parallel, und man setze den Bogen $AP = x$, den Winkel $MAP = \eta$, so ist $PM = x \, tang \, \eta$. Ferner sey MR vertical und PT horizontal, so ist MPT der Neigungswinkel der Spindel gegen den Horizont. Man setze diesen Winkel $= \vartheta$, so ist $MT = PM \, fin \, \vartheta = x \, tang \, \eta \, fin \, \vartheta$: die durch B horizontal gelegte Ebene heisse Kürze halber die Fundamental-Ebene, und MT schneide diese Ebene in R. Wenn nun auch Pr auf eben dieser Ebene senkrecht ist, so hat man $Pr = TR$. Es sey noch PN auf AB senkrecht, so ist PN horizontal, und wenn NS auf die Fundamental-Ebene senkrecht gezogen wird, so ist auch $NS = Pr = TR$. Weil nun $NBS = 90° - \vartheta$, so wird $NS = BN \, cos \, \vartheta = TR$, und die gesuchte Höhe $MR = x \, tang \, \eta \, fin \, \vartheta + BN \, cos \, \vartheta$. Der Halbmesser AO der Spindel sey $= r$, so ist $BN = 2r - AN$ und $AN = r \, fin \, v \, \frac{x}{r}$, folglich die gesuchte Höhe $MR = x \, tang \, \eta \, fin \, \vartheta + r \, (2 - fin \, v \, \frac{x}{r}) \, cos \, \vartheta$, oder auch $MR = x \, tang \, \eta \, fin \, \vartheta + r \, (1 + cos \, \frac{x}{r}) \, cos \, \vartheta$.

5. §.

Aus dieser Gleichung fliessen folgende Sätze. Wenn $x = 0$ ist, so hat man $MR = 2r \, cos \, \vartheta$, wie auch aus Betrachtung der Zeichnung unmittelbar erhellet. So lange als x sehr klein ist, wächst MR, wenn x wächst, denn $x \, tang \, \eta \, fin \, \vartheta$ wächst mit x, und $r \, (1 + cos \, \frac{x}{r}) \, cos \, \vartheta$ nimmt zwar ab: allein nur sehr wenig, weil $cos \, \frac{x}{r}$ sehr nahe $= 1$ ist, so lange x sehr klein bleibt. Wie lange MR wachse, findet man vermittelst der Differential-Rechnung, es wird nemlich $\vartheta \, MR = \vartheta x \, tang \, \eta \, fin \, \vartheta - \vartheta x \, fin \, \frac{r}{x} \, cos \, \vartheta$. So lange dies Differential positiv bleibt, so lange wächst MR, und dies erfolgt, so lange $fin \, \frac{x}{r} < tang \, \eta \, tang \, \vartheta$ bleibt. Wenn aber $fin \, \frac{x}{r} = tang \, \eta \, tang \, \vartheta$ wird, so ist MR am grösten, und nimmt wieder ab,

wenn

$\sin\frac{x}{r} > tang\,\eta\, tang\,\vartheta$ wird. Es ſey demnach $\sin\frac{AQ}{r} = tang\,\eta\, tang\,\vartheta$, und QL mit der Spindelaxe parallel, ſo liegt der Punct L in der Schraubenlinie höher, als die zunächſt vorhergehenden und nachfolgenden Puncte.

Wenn $x = \frac{1}{2}\pi r$ wird, ſo iſt $\sin\frac{x}{r} = 1$, und gröſſer kann dieſer Sinus nicht werden. Für gröſſere Werthe von x nimmt $\sin\frac{x}{r}$ wieder ab, ſo daß aufs neue $\sin\frac{x}{r} = tang\,\eta\, tang\,\vartheta$ wird, wenn $x = \pi r - AQ$ iſt. Für gröſſere Werthe von x muß alſo $\sin\frac{x}{r} < tang\,\eta\, tang\,\vartheta$ werden, und MR wieder wachſen. Wenn demnach $AP = \pi r - AQ$ genommen, und PM mit der Spindel-Axe parallel gezogen wird, ſo liegt M niedriger, als die zunächſt vorhergehenden und nachfolgenden Puncte der Schraubenlinie. Für $x = AQ$ hat die Höhe $L\rho$ einen gröſten, für $x = AP = \pi r - AQ$ aber hat MR einen kleinſten Werth: und wenn eine durch L horizontal gelegte Ebene die Schraubenlinie in *l* ſchneidet, ſo iſt LM*l* derjenige Bogen, der ſich auf einmal mit Waſſer füllen kann, (arcus hydrophorus). Man ſtelle ſich vor, das Waſſer, worinn die Spindel ſteht, ſteige höher hinauf, als L liegt, ſo wird durch A Waſſer in die Schnecke hinein treten, und es wird ſich nicht allein der ganze Bogen ALM*l* mit Waſſer füllen, ſondern es wird auch noch über *l* hinaus in die Röhre hinein treten, ſo weit bis es in der Röhre eben ſo hoch, als drauſſen ſteht. Wenn hiernächſt das äuſſere Waſſer wieder bis unter L ſinkt, ſo wird etwas durch A heraus laufen, aber der ganze Bogen LM*l* wird mit Waſſer angefüllt bleiben.

6. §.

Dafern die Schnecke das Waſſer zu heben dienen ſoll; ſo muß der Neigungswinkel der Grundfläche gegen den Horizont

rizont gröſſer ſeyn, als der Winkel der Schrauben-Linie mit dem Umfang der Grundfläche.

Beweis. Es ſey der Winkel $ABS < \nu$, alſo $90° - \vartheta < \nu$, ſo iſt $\cot\vartheta < tang\,\nu$, folglich $tang\,\nu\ tang\,\vartheta > 1$. Wenn aber die Höhe Lq einen gröſten, und MR einen kleinſten Werth haben ſoll; ſo muß $fin\frac{QA}{r} = fin\frac{AP}{r} = targ\,\nu\ tang\,\vartheta$ ſeyn. Dies würde alſo bey der angenommenen Vorausſetzung $fin\frac{AQ}{r}$, oder $\frac{fin\,AP}{r} > 1$ geben, welches nicht möglich iſt. Wäre $ABS = \nu$, alſo $\cot\vartheta = tang\,\nu$, ſo hätte man $tang\,\nu\ tang\,\vartheta = 1$, $= fin\frac{AQ}{r} = \frac{fin\,AP}{r}$, folglich müſte $\frac{AQ}{r} = \frac{AP}{r} = \frac{1}{2}\pi$ ſeyn, und die Puncte L und M würden wie P und Q in einen zuſammen fallen, ſo daß der Waſſerhaltende Bogen LM*l* verſchwände. In der Schnecke kann demnach nur alsdenn nach hydroſtatiſchen Geſetzen Waſſer ſtehen bleiben, wenn $ABS > \nu$ iſt.

Es muß demnach auch $90° - \nu > 90° - ABS$ ſeyn, alſo $90° - \nu > \vartheta$, da dann $90° - \nu$ der Winkel iſt, welchen die Schraubenlinie mit den Ordinaten PM einſchlieſt. Dieſer muß alſo gröſſer ſeyn, als die Neigung der Spindel gegen den Horizont.

Wenn man $tang\,\nu\ tang\,\vartheta = T$ ſetzt, ſo erhält man $AQ = r\,A\,fin\,T$, und $AP = r(\pi - A\,fin\,T)$ (5. §.) da dann dieſe Gleichungen dienen, die Puncte P und Q, alſo auch L und M zu finden.

7. §.

Man ſtelle ſich nun (2. Fig.) die Schnecke in jeder andern willkührlichen Lage vor, ohne daß die untere Oefnung ſich an ihrer

höchsten Stelle bey A befindet, etwa wie in der 2. Fig. wo sich die untere Oefnung bey a in dem Halbkreise $AaPB$ befindet. Man erweitere in Gedanken die cylindrische Fläche der Spindel unterhalb der Grundfläche AB, und stelle sich zugleich vor, die Schraubenlinie werde ebenfalls unterhalb a verlängert bis sie mit AD in A' zusammenstößt. Man lege durch A' eine Ebene mit der Grundfläche der Spindel parallel, so giebt ihr Schnitt mit der Cylinderfläche einen der Grundfläche gleichen Kreis A'Q P B'. Nimmt man nun $A'Q' = r A \sin T$, $A'P' = r(\pi - A \sin T)$ und zieht alsdenn Q'L und P'M mit der Cylinder-Axe parallel, so ist wie im 5. §. L der höchste und M der niedrigste Punct des wasserhaltenden Bogens: es sind aber diese Puncte mit denjenigen nicht einerley, welche im 5. §. bestimmet wurden, auch ist ihre Höhe über der Fundamentalebene von der dortigen unterschieden. Um ihre Höhe für den gegenwärtigen Fall zu finden, erwäge man folgendes. Wenn man sich durch B' eine Horizontalfläche vorstellt, so ist die Höhe des Puncts L über diese Ebene $= A'Q' \tang \eta \sin \vartheta + r\left(1 + \cos\frac{A'Q'}{r}\right) \cos \vartheta$, und die Höhe des Puncts M über dieselbe $= A'P' \tang \eta \sin \vartheta + r\left(1 + \cos\frac{A'P'}{r}\right) \cos \vartheta$. Die Horizontalfläche durch B' liegt aber um das Stück $B'B \sin \vartheta$ niedriger, als die vorige durch B, und es ist $B'B = A'A = Aa . \tang \eta$. Wenn also der Winkel $AOa = \phi$ folglich $Aa = r . \phi$ gesetzt wird; so erhellet, daß man von jeder der angegebenen Höhen das Stück $r \phi \tang \eta \sin \vartheta$ abziehen müsse, um sie in die Höhen über die Horizontalfläche durch B zu verwandeln. Demnach wird die Höhe des Puncts $M = (A'P' - r\phi) \tang \eta \sin \vartheta + r\left(1 + \cos\frac{A'P'}{r}\right) \cos \vartheta$.

Wäre

Wäre a in dem andern Halbkreise AbB befindlich, so würde der Bogen Ma die Linie AD oberhalb A schneiden. Wenn man sich also den Durchschnittspunct A′ oberhalb A vorstellt, so sieht man wohl, daß die Höhe des Puncts $M = (A'P' + r\phi)$ *tang* ψ *fin* $\vartheta + r\,(1 + cof\frac{A'P'}{r}\ cof\vartheta$ werden müsse. Dasselbe ergiebt sich auch daraus, weil alsdenn der Winkel ϕ in der vorigen Gleichung das entgegen gesetzte Zeichen haben muß.

8. §.

Diese Schlüsse machen (2. Fig.) die Art und Weise begreiflich, wie das Wasser bloß wegen seines Gewichts in der Wasserschraube steigen kann. Man stelle sich nemlich vor, die niedrigste Oefnung stehe anfangs in A, da noch alles ledig ist, und die Schnecke werde nun so gedrehet, daß die untere Oefnung von A durch b, B, P, Q laufe. Erreicht sie nun beym Herabsteigen bey a' das Wasser, so tritt dasselbe nach den Gesetzen der Hydrostatick in die Röhre so hoch hinein als es drausen steht, vorausgesetzt, daß die Maschine nicht zu schnell umlaufe. In dem Augenblick nun, da A in P′ ankommt, ist zwar derjenige Bogen mit Wasser gefüllt, der sich von P aus bis wieder an die Wasserfläche auf der andern Seite erstreckt: allein wenn in diesem Augenblick der Umlauf gehemmet wurde, und das Wasser alsdenn tiefer herab sänke, als P liegt, so würde auch alles in die Schnecke schon hineingetretene Wasser wieder herauslaufen, weil P niedriger liegt, als die übrigen Puncte des mit Wasser angefüllten Bogens. Wäre aber die untere Oefnung schon über P hinaus bis nach a' vorgerückt, so würde unter eben den Umständen nicht mehr alles Wasser auslaufen, weil die zwischen m und a' befindlichen Puncte höher als m liegen. Gesetzt also, daß auch das Wasser nur bis an die

... und die untere Oeffnung bey a' ſchon
... hervorſteige, ſo würde doch der Bogen
... Waſſer, wenn auch b' in dem Waſſerpaß a'a'
... beym fernern Umlauf der Schnecke die untere
... hinauf von a' bis a, ſo kann die hinein getretene
... Waſſer nicht in demſelben Bogen a'm'b' bleiben: Denn es
... m nach m' gerückt, und M liegt nun niedriger, als m'. Al-
... daß das Waſſertheilchen was vorhin in m war, jetzt nach M
... ſeyn, und man ſieht leicht, daß alle übrige Waſſertheilchen,
... eben ſoviel gehoben ſind, als M höher wie m liegt. Zur Er-
... terung der Sache kann man ſich die ganze hineingetretene
Maſſe im Punct m vorſtellen, ſo erhellet, daß dieſe Maſſe in der
geraden Linie PM immer weiter hinauf rücken müſſe, wenn die
Schnecke umzulaufen fortfährt.

9. §.

Wenn die Sehne QV auf AB ſenkrecht ſteht, (1. Fig.) ſo iſt ſie horizontal, und die bisherige Ausführung ergiebt, daß die Grundfläche der Waſſerſchraube bis an dieſe Sehne unter Waſſer ſtehen müſſe, wenn die Schnecke bey jedem Umlauf die möglichſt gröſte Menge Waſſer ſchöpfen ſoll. Steht das Waſſer niedriger, ſo ſchöpft die Schnecke nicht ſoviel: ja ſie würde gar nichts ſchöpfen, wenn das Waſſer noch unter der Horizontallinie PN ſtünde. Es iſt aber $AQ = r\,A\,\mathit{fin}\,T = AV$, und dadurch werden die Puncte V und Q beſtimmt. Eine gröſſere Tiefe unter dem Waſſer iſt, ſoviel ſich aus dem bisherigen Vortrag beurtheilen läſt, unnöthig. Wenn ſich nun die Länge des waſſerhaltenden Bogens zur Länge eines Schraubenganges wie $v : \mu$ verhält, und es iſt die Menge Waſſer, die der ganze Schraubengang faſſen würde, $= Q$, ſo ſchöpft die Schnecke bey jedem Umlauf die Menge Waſ-

ſer

ſer $\frac{v}{\mu}$ Q. Dieſe Menge tritt beym zweyten Umlauf der Schnecke aus dem untern Schraubengang in den nächſthöhern, beym dritten Umlauf aus dem zweyten Schraubengang in den dritten u. ſ. f. bis es endlich nach ſoviel Umläufen, als Schraubengänge vorhanden ſind, aus dem oberſten Schraubengange ausläuft. Das Waſſer nemlich, was nach dem erſten Umlauf in LM*l* ſtand, wird nach dem zweyten Umlauf in L'M'*l'* ſtehen, u. ſ. f.

10. §.

Es ſey nun die Schnecke (1. Fig.) in einer gewiſſen willkührlichen Lage befeſtiget, und man nehme an, daß in einem Schraubengange der waſſerhaltende Bogen mit Waſſer angefüllet ſey: ſo wird das Gewicht dieſes Waſſers die Schraube zu drehen ſtreben. Wäre das Gewicht dieſer ganzen Maſſe in dem Punct M beyſammen, ſo würde man das Moment, womit daſſelbe die Schraube und ihre Axe Oo zu drehen ſtrebte, ſo finden. Dieß Gewicht ſey $= p$, ſo iſt die Richtung MT deſſelben vertical. Man zerlege es nach den Richtungen MP und MX, ſo daß MX in der Ebene PMT auf MP ſenkrecht ſteht, ſo wird der Druck nach MX $= p \, fin$ MTX $= p \, fin$ TMP $= p \, cos \vartheta$. Es ſey MY mit PO parallel, ſo iſt die Ebene XMY auf PM, folglich auch auf Oo ſenkrecht, und das Moment des Drucks nach MX $= g \, cos \vartheta \, r \, fin.$ XMY. Nun ſey Z*z* die Durchſchnittslinie der Ebene XMQ mit ABCD, ſo iſt der Winkel MYZ = POB. Ferner iſt die Ebene MPT mit ABCD, alſo MX mit YZ parallel, folglich der Winkel XMY $= 180° -$ BOP = AOP, und das Moment des Drucks MX $= p \, cos \vartheta \, r \, fin.$ AOP. Da nun AOP $= \frac{AP}{r}$, ſo iſt $fin \, AOP = fin \frac{AP}{r} = tang \, \eta \, tang \vartheta$ (6. §.) alſo wird das Moment des Drucks nach MX $=$ $pr \, fin \vartheta \, tang \, \eta$.

11. §.

11. §.

Das Moment zu finden, womit das Waſſer, ſo wie es durch den ganzen Bogen *LMl* ausgebreitet iſt, die Schnecke um ihre Axe zu drehen ſtrebt.

Aufl. Es ſey M ein unbeſtimmter Punct des waſſerhaltenden Bogens, das Stück AM der centriſchen Linie $= s$, der Bogen AL $= \varepsilon$, und die Länge des waſſerhaltenden Bogens LM$l = \lambda$; ſo ſind die Kreisbogen AP $= s \cos\vartheta$, AQ $= \varepsilon \cos\vartheta$, AQPB$q = (\varepsilon + \lambda) \cos\vartheta$, folglich APB$q = \lambda \cos\vartheta$. Wenn nun LQ und *lq* mit der Axe der Spindel parallel, Qv und $q\mu$ aber auf AB ſenkrecht ſind, ſo iſt A$v = r \sin v \frac{AQ}{r}$, und A$\mu = r \sin v \frac{APBq}{r}$. Wenn ferner das Gewicht der ganzen Maſſe Waſſer $= p$ geſetzt wird, ſo iſt das Gewicht des in M befindlichen Elements $= \frac{pds}{\lambda}$. Das Moment, womit dies Element die Schraube zu drehen ſtrebt, iſt $= \frac{pds}{\lambda} \cos\vartheta . r \sin$ AOP (10. §.) $= \frac{pds}{\lambda}$ NP $\cos\vartheta$. Nun iſt AP $= r$ A $\sin v \frac{AN}{r} = r$ A $\sin v \frac{x}{r}$, wenn man AN $= x$ ſetzt, folglich d. AP $= \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - xx)}} = \frac{rdx}{NP}$, und es war AP $= s \cos\vartheta$, alſo wird $ds = \frac{rdx}{NP \cos\vartheta}$. Dies ſtatt ds geſetzt giebt das Moment, womit das in M befindliche Element die Schraube zu drehen ſtrebt, $= \frac{r p dx \cos\vartheta}{\lambda \cos\vartheta}$. Wird nun die Summe der Momente aller Waſſertheilchen von L bis M $= \mu$ geſetzt, ſo hat

man

man vermittelst der Integration $\mu = \frac{r p x \cos \Im}{\lambda \cos \eta} + C$. Es ist aber $\mu = o$, wenn $x = Av = r \sin v \frac{AQ}{r}$ ist, also wird $\mu = \frac{r p \cos \Im}{\lambda \cos \eta} (x - r \sin v \frac{AQ}{r})$; und um dasselbe für den ganzen wasserhaltenden Bogen zu haben, muß man $x = A\mu = r \sin v \frac{APBq}{r}$ setzen; woraus der Ausdruck

$$\mu = \frac{r p \cos \Im}{\lambda \cos \eta} r \left(\sin v \frac{APBq}{r} - \sin v \frac{AQ}{r} \right)$$

folgt, oder auch

$$\mu = \frac{r p \cos \Im}{\lambda \cos \eta} r \left(\cos \frac{AQ}{r} - \cos \frac{APBq}{r} \right).$$

Dieser Ausdruck läst sich noch auf folgende Art verkürzen. Weil L und l die äussersten Puncten des wasserhaltenden Bogens sind, so liegen sie gleich hoch über dem Horizont. Aus dem 4. §. aber ergiebt sich die Höhe des Puncts L über die durch B horizontal gelegte Ebene, wenn man AQ statt des dortigen α setzt, und die Höhe des Puncts l über eben die Ebene, wenn man APBq statt x setzt. Sucht man auf diese Art beyde Höhen, und setzt sie einander gleich, so kommt man auf die Gleichung

$$AQ \, tang \, \eta \, \sin \Im + r \left(1 + \cos \frac{AQ}{r} \right) \cos \Im =$$

$$APBq \, tang \, \eta \, \sin \Im + r \left(1 + \cos \frac{APBq}{r} \right) \cos \Im.$$

Daraus folgt

$$AQ \, tang \, \eta \, tang \, \Im + r \cos \frac{AQ}{r} = APBq \, tang \, \eta \, tang \, \Im + r \cos \frac{APBq}{r},$$

folglich $r \left(\cos \frac{AQ}{r} - \cos \frac{APBq}{r} \right) = (APBq - VQ)$ $tang \, \eta$

$tang\,\eta\ tang\,\vartheta = \lambda\ cof\,\pi\ tang\,\pi\ tang\,\vartheta$ (weil $APBq - AQ = QPBq = \lambda\ cof\,\pi = \lambda\ fin\,\pi\ tang\,\vartheta$. Dieß in den gefundenen Werth von μ geſetzt gibt $\mu = \frac{rp\,cof\,\vartheta}{\lambda\,cof\,\eta} \times \lambda\,fin\,\pi\ tang\,\vartheta = rp\,tang\,\eta\ fin\,\vartheta$.

Wenn das ganze Gewicht p in dem Punct M beyſammen wäre, ſo würde das Moment deſſelben eben ſo groß ſeyn. (10. §.) Deswegen wird dieß Moment leicht gefunden, wenn man p berechnen kann, und dieſe Rechnung ſetzt voraus, daß man die Länge des waſſerhaltenden Bogens λ finden könne. Wenn nemlich jeder Querſchnitt der um die Spindel gewundenen Röhre $= k^2$ iſt, ſo hat man $p = \gamma k^2 \lambda$, wo λ das Gewicht eines Cubic-Fuſſes Waſſer bedeutet.

12. §.

Die Länge des waſſerhaltenden Bogens *LM* zu finden.

Aufl. Es ſey der Kreisbogen $AQ = \alpha$ der dem höchſten Punct L zugehört, ſo hat man $\alpha = r\,A\,fin\,T$, und $T = tang\,\eta\ tang\,\vartheta$. (6. §.) Ferner ſey $APBq = \beta$, ſo erhält man aus dem vorigen §. die Gleichung $cof\frac{\alpha}{r} - cof\frac{\beta}{r} = \left(\frac{\beta}{r} - \frac{\alpha}{r}\right) tang\,\eta\ tang\,\vartheta$. Man ſetze $cof\frac{\beta}{r} = z$, ſo hat man $\frac{\beta}{r} = A\,cof\,z$ ſo wie $\frac{\alpha}{r} = A\,fin\,T$, und $cof\frac{\alpha}{r} = \sqrt{(1 - TT)}$. Dies gibt

$$\sqrt{(1-TT)} - z = (A\,cof\,z - A\,fin\,T)\,T,$$

oder $z + T.\,A\,cof\,z = \sqrt{(1-TT)} + T.\,A\,fin\,T$. Wenn aus dieſer Gleichung z gefunden iſt, ſo hat man zugleich $A\,cof\,z = \frac{\beta}{r}$,

alſo

also auch $\frac{\beta - \alpha}{r}$ und $\beta - \alpha$. Es ist aber $\beta - \alpha = QPBq =$ $\lambda \cos \eta$, und daraus erhält man $\lambda = \frac{\beta - \alpha}{\cos \eta} = (\beta - \alpha) \sec \eta$. Die Länge eines ganzen Schraubenganges ist $= 2\pi\nu \sec \eta$; wird also diese $= l$ gesetzt, so hat man $\lambda = \frac{\beta - \alpha}{2\pi\nu} l$.

Aus dem 6. §. weis man, daß $tang\,\eta\, tang\,\vartheta$ nicht grösser, als 1. seyn könne. Der Werth $tang\,\eta\, tang\,\vartheta = 1$ giebt $\frac{\beta}{r} = \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}\pi$. Wird $tang\,\eta\, tang\,\vartheta < 1$ angenommen, also $\frac{\alpha}{r} < \frac{1}{2}\pi$, so muß $\frac{\beta}{r} < \frac{1}{2}\pi$ werden. Denn es ist $AP = p\,(\pi - \frac{\alpha}{r})$, wird also $\frac{\alpha}{r} < \frac{1}{2}\pi$, so wird $\frac{AP}{r} > \frac{1}{2}\pi$. Aber es ist allemal $APBq > AP$, also $\frac{\beta}{r} > \frac{AP}{r}$, folglich auch $\frac{\beta}{r} > \frac{1}{2}\pi$, daß demnach $\cos \frac{\beta}{r}$ das entgegen gesetzte Zeichen bekommt. Je kleiner $tang\,\eta$ $tang\,\vartheta$, also auch $\frac{\alpha}{r}$ wird, desto grösser muß $\frac{\beta}{r}$ werden. Wird $tang\,\eta\, tang\,\vartheta = 0$, also $\frac{\alpha}{r} = 0$, so wird $1 - \cos \frac{\beta}{r} = 0$, und $\cos \frac{\beta}{r} = 1$, folglich $\frac{\beta}{r} = 2\pi$.

13. §.

Weil die völlige Auflösung der Aufgabe des vorigen §. darauf beruhet, daß man den Werth von x aus der Gleichung

$x + T.A\,cof\,x = \sqrt{(1+TT)} + T.A\,fin\,T$ finden könne, ſo müßte man $A\,cof\,x$ durch x ausdrücken, und ſodann x auf eine Seite des Gleichheits-Zeichens bringen. Allein es iſt bekannt, daß ſich $A\,cof\,x$ nicht anders, als vermittelſt einer unendlichen Reihe durch x ausdrücken laſſe: deswegen bedient man ſich hier einer oder der andern bekannten Näherungs-Methoden. Man nimmt den Werth von x muthmaßlich an, und ſucht ihn nach und nach dem wahren Werth von x ſo nahe zu bringen, als der jedesmal erforderlichen Schärfe gemäß iſt. Wenn man die Gleichung ſo ausdrückt $x + T.A\,cof\,x - \sqrt{(1-TT)} - T.A\,fin\,T = o$, und den Ausdruck vor dem Gleichheitszeichen $= Y$ ſetzt, ſo wird Y eine Function von x; und man weis, wenn der Werth $x = f$ den Werth $Y = F$ giebt, und beynahe $F = o$ iſt; daß alsdenn ſchon beynahe $x = f$ ſey, und noch näher $x = f - \frac{F dx}{dy}$, alſo hier $x = f - \frac{F\sqrt{(1-ff)}}{\sqrt{(1-ff)} - T}$ gefunden werde. Dieſer Methode zu ſchlieſſen haben ſich ſchon andere Schriftſteller bedienet, die ich unten nahmhaft machen werde.

14. §.

Wenn b der Abſtand der Schraubengänge iſt; ſo hat man $tang\,\eta = \frac{b}{2\pi r}$. Demnach wird im 11. §. $\mu = r\,p\,tang\,\eta\,fin\,\vartheta = \frac{b}{2\pi}\,p\,fin\,\vartheta$, und dies wäre das Moment der Kraft, welches erfordert wird, die Schraube im Gleichgewicht zu erhalten, wenn nur ein waſſerhaltender Bogen angefüllet iſt. Wenn demnach die Anzahl der Schraubengänge $= n$ iſt, ſo wird dies Moment $= \frac{nb}{2\pi}\,p\,fin\,\vartheta$, wenn alle Bogen gefüllt ſind. Wird nun in einer

Ebene,

Ebene, die auf der Axe Oo senkrecht ist, in der Entfernung f von der Axe eine Kraft P angebracht, so ist ihr Moment $= Pf$; und wenn diese Kraft mit der gesammten Masse Wasser, womit die Schraube beschwert ist, im Gleichgewicht seyn soll, so erhält man $P = \frac{b \sin \vartheta}{2\pi f} n p$, da dann $n p$ das Gewicht der ganzen in der Schraube befindlichen Masse Wasser ist. Wenn diese $= Q$ gesetzt und die Kraft P durch eine Menge Wasser ausgedrückt wird, deren Gewicht dieser Kraft gleich ist; so hat man $P = \frac{b \sin \vartheta}{2\pi f} Q$. Indem aber die Schnecke einmal herum geht, durchläuft die Kraft den Weg $2\pi f$, und die Last Q wird um die Höhe $b \sin \vartheta$ gehoben.

Ist M der niedrigste Punct des wasserhaltenden Bogens, so ist seine Höhe über eine durch B horizontal gelegte Ebene $= (AP + r\phi) \tan g \psi \sin \vartheta + r(1 + \cos \frac{AQ}{r}) \cos \vartheta$, wenn ϕ den Winkel AOa bedeutet, um welchen sich die Spindel gegen AqBP zu gedrehet hat. (7. §.) Der veränderliche Theil $r\phi \sin \psi \tan g \vartheta$ dieses Ausdrucks ist dem Winkel ϕ proportional. Wenn also die Spindel gleichförmig umläuft, so steigt auch die Last mit gleichförmiger Bewegung, und weil das Moment der Last gar nicht von dem Winkel ϕ abhängt, so ist dasselbe von gleicher Grösse, was auch die Spindel durch die Umdrehung um ihre Axe für eine Lage bekommt.

15. §.

Die Wasserschraube wird durch eine Maschine umgetrieben, und an derselben ist eine veränderliche Kraft angebracht, die von der Geschwindigkeit der Maschine ab-

hängt: man ſucht die Menge Waſſer, welche dieſe Maſchine bey der vortheilhafteſten Anordnung auf eine gegebene Höhe $= a$ in gegebener Zeit T haben kann.

Aufl. Man muß diejenige Geſchwindigkeit des angegriffenen Theils der Maſchine kennen, wobey das mechaniſche Moment der Kraft am größten wird. Dieſe Geſchwindigkeit ſey $= \alpha$, und die davon abhängende Kraft $= F$. Die Umlaufszeit der Spindel ſey $= t$, ſo ſteigt das Waſſer binnen der Zeit t auf die Höhe $b \sin \vartheta$, und die Geſchwindigkeit deſſelben nach der verticalen Richtung iſt $= \frac{b \sin \vartheta}{t}$, folglich das mechaniſche Moment der Laſt $= \frac{Q b \sin \vartheta}{t}$. Für den Beharrungsſtand der Maſchine hat man alſo $F\alpha = \frac{Q b \sin \vartheta}{t}$. Wenn nun n die Anzahl der Schraubengänge iſt, ſo hebt die Maſchine in der Zeit t die Menge Waſſer $\frac{1}{n} Q$ auf die Höhe $n b \sin \vartheta = a$, folglich in der Zeit T die Menge $\frac{T.Q}{n.t}$. Wenn man dieſe Waſſermenge $= M$ ſetzt, und den Werth $\frac{Q}{t} = \frac{F\alpha}{b \sin \vartheta}$ ſubſtituirt, ſo findet man $M = \frac{F\alpha T}{n b \sin \vartheta} = \frac{F\alpha T}{a}$.

16. §.

Eine vortheilhafte Anordnung einer Maſchine, welche die Waſſerſchraube umtreiben ſoll, anzugeben.

Aufl.

Aufl. Man hat einmal die Gleichung $M = \frac{F\alpha T}{a}$, und hiernächst ist die in der Zeit t gehobene Menge Wasser $= \frac{1}{n} Q = \frac{Mt}{T}$; und weil eben dies diejenige Menge ist, die einen wasserhaltenden Bogen füllet; so muß $k^2 \lambda = \frac{Mt}{T}$ seyn, wenn λ die Länge des wasserhaltenden Bogens, und k^2 den flächen Innhalt seiner Querschnitte bedeutet. Aus dieser Gleichung hat man $t = \frac{K^2 \lambda T}{M}$. Die Umlaufszeit des Hauptrades sey $= \vartheta$, und der Halbmesser desselben $= \varrho$, so ist $\vartheta = \frac{2\pi\varrho}{a}$, da dann das Verhältniß $\frac{\vartheta}{t}$ die Einrichtung der Maschine bestimmt.

Gewöhnlich wird die Höhe a gegeben seyn, auf welche die Maschine das Wasser bringen soll, und daraus ergiebt sich $M = \frac{F\alpha T}{a}$, wenn das mechanische Moment der Kraft, $F\alpha$ bekannt ist. Die Wahl der Kraft, welche die Maschine treiben soll, wird von der Beschaffenheit des Orts, wo die Maschine angelegt werden soll, und andern eintretenden Umständen abhängen. Uebrigens sind nun in der Gleichung $t = \frac{k^2 \lambda T}{M}$ drey Grössen t, k^2 und λ vorhanden, wovon man zwey willkührlich bestimmen kann: jedoch ist man dabey an folgende Einschränkungen gebunden. Man bestimmt λ, wenn man die Winkel ν, ϑ, und den Halbmesser r der Spindel bestimmt, von der Axe der Spindel bis an die centrische Linie der um die Spindel geführten Röhre genommen. Es sey

nun

nun die Länge der Spindel $Oo = b$, ſo iſt $\mathit{fin}\,\vartheta = \frac{a}{b}$. Je kleiner demnach b genommen wird, deſto gröſſer wird $\mathit{fin}\,\vartheta$. Man ſieht leicht, daß es vortheilhaft ſey, b ſo klein zu nehmen, als die Umſtände zulaſſen, weil dadurch nicht allein ein Theil der Köſten erſpart, ſondern auch das Gewicht der Schnecke, folglich zugleich die Friction an ihren Zapfen vermindert wird. Aber man darf auch b nicht zu klein nehmen, damit $\mathit{fin}\,\vartheta$ nicht zu groß werde, und dies aus zweyen Urſachen. Einmal muß $\mathit{tang}\,\vartheta\,\mathit{tang}\,\eta < 1$ ſeyn, damit die Schnecke wirklich Waſſer ſchöpfen könne, und fürs zweyte wird der waſſerhaltende Bogen deſto gröſſer, je kleiner $\mathit{tang}\,\vartheta\,\mathit{tang}\,\eta$ bleibt. Wenn alſo ϑ dieſen Einſchränkungen gemäß angenommen iſt, ſo muß $\eta < 90° - \vartheta$ ſeyn, da dann beyde Winkel η und ϑ zuſammen die Bögen $\frac{\alpha}{r}$ und $\frac{\beta}{r}$ beſtimmen, (12. §.) wofür ich ε und ζ ſchreiben will, da dann $\lambda = (\zeta - \varepsilon)\, r\, \mathit{sec}\,\eta$ wird, und r noch unbeſtimmt bleibt.

Man brauche nun dieſen Werth ſtatt λ in der Gleichung $k^2 \lambda T = M.t$, ſo hat man $k^2 (\zeta - \varepsilon)\, T\, r\, \mathit{sec}\,\eta = M\, t$, und es können nun zwey von den dreyen Gröſſen k^2, r, und t willkührlich genommen werden. Weil es aber nicht rathſam iſt, daß die Schnecke ſehr ſchnell umlaufe, weil ſonſt der unterſte Schraubengang ſich nicht gehörig füllen würde, ſo iſt es am beſten, die Einrichtung ſo zu machen, daß t nicht unter 4. Secunden ausfalle. Man kann alſo in Rückſicht auf dieſen Umſtand t willkührlich annehmen, und man erhält $k^2 r = \frac{M\, t}{(\zeta - \varepsilon)\, T\, \mathit{sec}\,\eta}$, da dann k^2 oder r willkührlich angenommen werden kann. Hiebey bleibt alsdenn noch zu erwegen, daß k^2 nicht zu klein ausfallen müſſe, damit das Waſſer

ser einen völlig freyen Durchgang behalte, und sich keine Unreinigkeiten in der Röhre ansetzen.

17. §.

So wie ich bisher die Theorie von der Wasserschraube vorgetragen habe, eben so ist sie von den meisten mir bekannten Schriftstellern betrachtet worden. Es gehört dahin ein Aufsatz des Herrn Pitot in den Memoires de l' Academie de Paris A. 1736. p. 238. ed. Bat. und des Herrn Daniel Bernoulli Commentationes speciales de cochlea Archimedis in der Hydrodynamica Sect. IX. p. 183. sqq. Der Verfasser der Dissertation sur ces questions: comment l' eau s' éléve t — elle dans la vis d' Archimede, & quels seroient les moyens de porter cette machine a sa perfection, welcher die berlinische Academie der Wissenschaften nächst der Hennertschen Preisschrift das accessit zuerkannt hat, bleibt bey demselben Vortrag dieser Theorie. Ich habe in den beyden letzten §§. eben diese Theorie mit der Ausübung in Verbindung zu bringen gesucht, und ich glaube, daß man sich in der Ausübung an die hieselbst gegebenen Vorschriften noch immer am sichersten halten könne. Von demjenigen, was die oben schon erwehnten Aufsätze der Herrn Euler und Hennert enthalten, werde ich bald mehr Nachricht ertheilen, und damit ich das neueste hieher gehörige Werk: Theoria cochleæ Archimedis ab observationibus, experimentis & analyticis rationibus ducta, auctore Jacobo Bellogrado Soc. Jesu. Parmæ 1767. nicht ganz mit Stillschweigen übergehe, so muß ich sagen, daß ich es nur aus Recensionen kenne, und das Buch selbst bisher noch nicht habe erhalten können.

18. §.

18. §.

Man nimmt nach der bisher vorgetragenen Theorie an, es trete bey jedem Umlauf der Spindel ſoviel Waſſer in die Schnecke hinein, als der waſſerhaltende Bogen faſſen kann, vorausgeſetzt, daß die Schnecke grade ſo tief unter Waſſer ſtehe, als die im 9. §. vorgetragene Rechnung erfordert. Dieſen Umſtand, vermöge deſſen die Grundfläche der Schnecke nicht ganz unter Waſſer ſtehen muß, ſchreibt Bernoulli ausdrücklich vor, und ihm folgt darin der Verfaſſer des Aufſatzes, welchem die Academie zu Berlin das acceſſit zuerkannt hat. Andere Schriftſteller, dahin Pitet gehört, ſchreiben es zwar nicht ausdrücklich vor, daß die Grundfläche nicht ganz unter Waſſer ſtehen müſſe, ſie berechnen aber doch die Würkung ſo, daß ſie keinen ununterbrochenen Guß des Waſſers aus der obern Mündung der Schraube annehmen, ſondern nur bey jedem Umlauf ſoviel, als der waſſerhaltende Bogen faſſet. Man wird demnach nun natürlich auf die Frage kommen: ob denn die Waſſerſchraube ihre Dienſte nicht leiſte, wenn ihre Grundfläche ganz unter Waſſer ſtehet, und ob nicht vielmehr alsdenn das Waſſer ununterbrochen durch die Röhre flieſſen, folglich dieſe Einrichtung noch vortheilhafter als die vorige ſeyn werde? Auf die Beantwortung dieſer Frage zielen Herrn Eulers Unterſuchungen ab in der Abhandlung: De cochlea Archimedis in den Comment. Nov. Petrop. T. V. pag. 259. ſqq. Dieſelbe Theorie legt Herr Hennert zum Grunde in der Diſſertation ſur la vis d' Archimede, qui a remporté le prix de Mathematique adjugé par l' Académie Royale des ſciences & belles lettres de Pruſſe en 1766. Ich werde demnach nun die Reſultate, welche beyde Schriftſteller heraus bringen, mit einander vergleichen.

19. §.

der Schraubenlinie $= 1$ gesetzt wird, so ist $\sqrt{u} = \frac{du}{dt} = \frac{dA}{dt \cos\theta}$; folglich $\frac{2}{dt} d\sqrt{u} = \frac{2}{dt \cos\theta} d\frac{dA}{dt}$. Ferner wird $\sqrt{z} = \frac{dz}{dt}$, also $\frac{2\cos\theta}{dt} d\sqrt{z} = \frac{2\cos\theta}{dt} d\frac{dz}{dt}$, und man erhält $V = \frac{2}{dt \cos\theta} d\frac{dA}{dt} - \frac{2\cos\theta}{dt} d\frac{dz}{dt}$. Das positive Stück in diesem Ausdruck kann man noch mit $\sin\theta^2 + \cos\theta^2 = 1$ multipliciren; so erhält man Herrn Henners Formel $V = -\frac{2\cos\theta}{dt} d\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2\sin\theta \tang\theta}{dt} d\frac{dA}{dt}$. M. s. die Preisschrift §. 10. pag. 71.

20. §.

Die von der Schwere abhängende Beschleunigung des Elements M nach der Richtung der relativen Bewegung Ax zu finden.

Anm. Wenn aM das Gewicht des Elements bezeichnet, so entsteht daher der Druck nach der Richtung $MX = aM \cos\beta$. Diese Richtung schließt mit (1. Fig.) der Tangente des Kreises ZMx, die durch M geht, einen Winkel $= 90° - ZYM = 90° - BCP$ ein, und es ist $BCP = \frac{z-1}{z}$, wenn z den Halbmesser der Spindel bezeichnet. Zerlegt man also die Kraft MX nach der Richtung der Tangente, und auf ihr senkrecht, so wird jene $= aM \cos\beta \cos\theta\, 90° - BCP = aM \cos\beta \sin\frac{z-1}{z}$. Mit der Richtung dieser Tangente schließt Mx den Winkel θ ein; also

entspringt

entſpringt hieraus nach der Richtung Mv die Kraft $dM \cos\vartheta \sin \frac{\alpha - A}{a} \cos\eta$. Ferner entſpringt aus dem Gewicht dM nach der Richtung MP der Druck $dM \cos MTP = dM \sin\vartheta$, und dieſer giebt nach der Richtung Mv den Druck $- dM \sin\vartheta \sin\eta$. Daher iſt der geſammte Druck nach der Richtung $Mv = dM$ $(\cos\vartheta \sin \frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta)$, und dieſer Druck durch die Maſſe dM dividirt giebt die geſuchte Beſchleunigung.

21. §.

Den Druck zu finden, welchen jedes Element M wegen der Zuſammenpreſſung des Waſſers leidet.

Aufl. Wenn h^2 jeden Querſchnitt der Röhre bezeichnet, und $h^2 p$ der Druck iſt, den das Element M nach der Richtung Mv leidet, ſo wird eben daſſelbe Element nach entgegen geſetzter Richtung den Druck $h^2 (p + dp)$ leiden, und daraus entſteht nach der Richtung Mv die Beſchleunigung $- \frac{h^2 dp}{dM} = - \frac{dp \cos\eta}{dA}$, weil $dM = \frac{h^2 dA}{\cos\eta}$ iſt. Hiezu addire man die im vorigen §. gefundene vom Gewicht des Elements herrührende Beſchleunigung, und ſetze die Summe dem im 19. §. gefundenen Ausdruck gleich, ſo erhält man folgende Gleichung $\cos\vartheta \sin \frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta - \frac{dp \cos\eta}{dA} = - \frac{2 \cos\eta}{dt} d. \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2 \sin\eta \tang\eta}{dt} d. \frac{dA}{dt}$. Wofern man dieſe Gleichung integriren kann, ſo iſt p gefunden. Weil man aber nur für einen gegebenen

Augenblick der Zeit t den Druck p ſucht, ſo muß t, alſo auch der davon abhängende Bogen z als eine beſtändige Gröſſe betrachtet werden. Man ſiehet ſogleich, wie das Integral gefunden werde, wenn man den Ausdruck $\frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cos\eta$ aus dem 19. §. für V gebraucht. Dies giebt $\cos\Sigma \sin\frac{z-A}{a}\cos\eta - \sin\Sigma\sin\eta - \frac{dp\cos\eta}{dA} = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du}{dt\sqrt{u}}\cos\eta$ woraus $dp\cos\eta = dA\sin\frac{z-A}{a}\cos d\cos\eta - dA\sin\Sigma\sin\eta + \frac{du\cos\eta}{dt\sqrt{u}}dA - \frac{da}{dt\sqrt{v}}dA$ folgt, und die Integration giebt $p\cos\eta = C + a\cos\frac{z-A}{a}\cos\Sigma\cos\eta - A\sin\Sigma\sin\eta + \frac{A\,du\cos\eta}{dt\sqrt{u}} - \frac{A\,dv}{dt\sqrt{v}}$. Eben die Gleichung findet Herr Euler a. a. O. 12. §. 271. S. Bey ihm das q, was hier p heißt, $\sqrt{u}$ hat das entgegengeſetzte Zeichen, weil er die Spindel nach APB umlaufen läßt, und s iſt bey ihm, was hier A heißt. Ueberdem iſt bey ihm der Bogen $Aa = p$, alſo $AP = p + s$, hier aber iſt $BP = z - A$, und man hat $\sin\frac{z-A}{a} = \sin\frac{p+s}{a}$, $\cos\frac{z-A}{a} = -\cos\frac{p+s}{a}$.

Herr Hennert a. a. O. 14. §. 74. S. ſchreibt ſtatt $\frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du\cos\eta}{dt\sqrt{u}}$ den Ausdruck durch α und A aus dem 19. §. und dies giebt

$p\cos\eta$

hängt: man ſucht die Menge Waſſer, welche dieſe Maſchine bey der vortheilhafteſten Anordnung auf eine gegebene Höhe $= a$ in gegebener Zeit T haben kann.

Auflöſ. Man muß diejenige Geſchwindigkeit des angegriffenen Theils der Maſchine kennen, wobey das mechaniſche Moment der Kraft am größten wird. Dieſe Geſchwindigkeit ſey $= \alpha$, und die davon abhängende Kraft $= F$. Die Umlaufszeit der Spindel ſey $= t$, ſo ſteigt das Waſſer binnen der Zeit t auf die Höhe $b \sin \vartheta$, und die Geſchwindigkeit deſſelben nach der verticalen Richtung iſt $= \frac{b \sin \vartheta}{t}$, folglich das mechaniſche Moment der Laſt $= \frac{Q\, b \sin \vartheta}{t}$. Für den Beharrungsſtand der Maſchine hat man alſo $F\alpha = \frac{Q\, b \sin \vartheta}{t}$. Wenn nun n die Anzahl der Schraubengänge iſt, ſo hebt die Maſchine in der Zeit t die Menge Waſſer $\frac{1}{n} Q$ auf die Höhe $n\, b \sin \vartheta = a$, folglich in der Zeit T die Menge $\frac{T \cdot Q}{n \cdot t}$. Wenn man dieſe Waſſermenge $= M$ ſetzt, und den Werth $\frac{Q}{t} = \frac{F\alpha}{b \sin \vartheta}$ ſubſtituirt, ſo findet man $M = \frac{F\alpha T}{n\, b \sin \vartheta} = \frac{F\alpha T}{a}$.

16. §.

Eine vortheilhafte Anordnung einer Maſchine, welche die Waſſerſchraube umtreiben ſoll, anzugeben.

Auflöſ.

Aufl. Man hat einmal die Gleichung $M = \frac{F\alpha T}{a}$, und hiernächst ist die in der Zeit t gehobene Menge Wasser $= \frac{1}{n}Q = \frac{Mt}{T}$; und weil eben dies diejenige Menge ist, die einen wasserhaltenden Bogen füllet; so muß $k^2\lambda = \frac{Mt}{T}$ seyn, wenn λ die Länge des wasserhaltenden Bogens, und k^2 den flächen Innhalt seiner Querschnitte bedeutet. Aus dieser Gleichung hat man $t = \frac{K^2\lambda T}{M}$. Die Umlaufszeit des Hauptrades sey $= \vartheta$, und der Halbmesser desselben $= \varrho$, so ist $\vartheta = \frac{2\pi\varrho}{\alpha}$, da dann das Verhältniß $\frac{\vartheta}{t}$ die Einrichtung der Maschine bestimmt.

Gewöhnlich wird die Höhe a gegeben seyn, auf welche die Maschine das Wasser bringen soll, und daraus ergiebt sich $M = \frac{F\alpha T}{a}$, wenn das mechanische Moment der Kraft, $F\alpha$ bekannt ist. Die Wahl der Kraft, welche die Maschine treiben soll, wird von der Beschaffenheit des Orts, wo die Maschine angelegt werden soll, und andern eintretenden Umständen abhängen. Uebrigens sind nun in der Gleichung $t = \frac{k^2\lambda T}{M}$ drey Grössen t, k^2 und λ vorhanden, wovon man zwey willkührlich bestimmen kann: jedoch ist man dabey an folgende Einschränkungen gebunden. Man bestimmt λ, wenn man die Winkel η, ϑ, und den Halbmesser r der Spindel bestimmt, von der Axe der Spindel bis an die centrische Linie der um die Spindel geführten Röhre genommen. Es sey

nun

18. §.

Man nimmt nach der bisher vorgetragenen Theorie an, es trete bey jedem Umlauf der Spindel ſoviel Waſſer in die Schnecke hinein, als der waſſerhaltende Bogen faſſen kann, vorausgeſetzt, daß die Schnecke grade ſo tief unter Waſſer ſtehe, als die im 9. §. vorgetragene Rechnung erfordert. Dieſen Umſtand, vermöge deſſen die Grundfläche der Schnecke nicht ganz unter Waſſer ſtehen muß, ſchreibt Bernoulli ausdrücklich vor, und ihm folgt darin der Verfaſſer des Aufſatzes, welchem die Academie zu Berlin das acceſſit zuerkannt hat. Andere Schriftſteller, dahin Pitot gehört, ſchreiben es zwar nicht ausdrücklich vor, daß die Grundfläche nicht ganz unter Waſſer ſtehen müſſe, ſie berechnen aber doch die Würkung ſo, daß ſie keinen ununterbrochenen Guß des Waſſers aus der obern Mündung der Schraube annehmen, ſondern nur bey jedem Umlauf ſoviel, als der waſſerhaltende Bogen faſſet. Man wird demnach nun natürlich auf die Frage kommen: ob denn die Waſſerſchraube ihre Dienſte nicht leiſte, wenn ihre Grundfläche ganz unter Waſſer ſtehet, und ob nicht vielmehr alsdenn das Waſſer ununterbrochen durch die Röhre flieſſen, folglich dieſe Einrichtung noch vortheilhafter als die vorige ſeyn werde? Auf die Beantwortung dieſer Frage zielen Herrn Eulers Unterſuchungen ab in der Abhandlung: De cochlea Archimedis in den Comment. Nov. Petrop. T. V. pag. 259. ſqq. Dieſelbe Theorie legt Herr Hennert zum Grunde in der Diſſertation ſur la vis d' Archimede, qui a remporté le prix de Mathematique adjugé par l' Académie Royale des ſciences & belles lettres de Pruſſe en 1766. Ich werde demnach nun die Reſultate, welche beyde Schriftſteller heraus bringen, mit einander vergleichen.

19. §.

19. §.

Die Umlaufs-Geschwindigkeit der Spindel (2. Fig.) nebst der relativen Geschwindigkeit des Wassers in der umwundenen Röhre sind gegeben: man sucht die Beschleunigung des Elements *M* nach der Richtung der relativen Bewegung *Mv*.

Aufl. Es sey die relative Geschwindigkeit des Wassers nach der Richtung $Mv = \sqrt{v}$, so ist wegen dieser Bewegung die Beschleunigung des Elements M nach dieser Richtung $= \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$. Dieser Ausdruck gilt unbestimmt für jedes Element, weil alle Querschnitte gleich groß angenommen werden. Ferner sey die Geschwindigkeit eines jeden Elements, womit es in seinem Kreise nach der Richtung *Mu* herum läuft, $= \sqrt{u}$, so entsteht daraus nach der Richtung Mv die Geschwindigkeit $\cos\eta\sqrt{u}$, die aber der vorigen $\sqrt{v}$ entgegen gesetzt ist. Setzt man also die gesamte Beschleunigung des Elements M nach der Richtung $Mv = V$, so hat man $V = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du}{dt\sqrt{u}}\cos\eta$, wenn angenommen wird, daß die Spindel nach der Richtung BPA umläuft. Liefe sie gegen APB zu, so müßte $\sqrt{u}$ das entgegen gesetzte Zeichen haben, und es wäre $V = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} + \frac{du}{dt\sqrt{u}}\cos\eta$. M. s. Herrn Eulers Aufsatz a. a. O. im 9. §. woselbst eben diese Formul aus Herrn Eulers Rechnungen fließt.

Nun setze man die Kreisbogen $Ba = \alpha$, $aP = A$, also $BP = a - A$, so ist $aM = \frac{A}{\cos\eta}$: und wenn eben dies Stück

der Schraubenlinie = s gesetzt wird, so ist $\sqrt{u} = \frac{ds}{dt} = \frac{dA}{dt\ cos\ \eta}$; folglich $\frac{2}{dt}\ d.\ \sqrt{u} = \frac{2}{dt\ cos\ \eta}\ d.\ \frac{dA}{dt}$. Ferner wird $\sqrt{u} = \frac{d\alpha}{dt}$, also $\frac{2\ cos\ \eta}{dt}\ d.\ \sqrt{u} = \frac{2\ cos\ \eta}{dt}\ d.\ \frac{d\alpha}{dt}$, und man erhält $V = \frac{2}{dt\ cos\ \eta}\ d.\ \frac{dA}{dt} - \frac{2\ cos\ \eta}{dt}\ d.\ \frac{d\alpha}{dt}$. Das positive Glied in diesem Ausdruck kann man noch mit $sin\ \eta^2 + cos\ \eta^2 = 1$ multipliciren; so erhält man Herrn Hennerts Formul $V = -\frac{2\ cos\ \eta}{dt}\ d.\ (\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}) + \frac{2\ sin\ \eta\ tang\ \eta}{dt}\ d.\ \frac{dA}{dt}$. M. s. die Preisschrift §. 10. pag. 71.

20. §.

Die von der Schwere abhängende Beschleunigung des Elements *M* nach der Richtung der relativen Bewegung *Mv* zu finden.

Aufl. Wenn dM das Gewicht des Elements bezeichnet, so entsteht daher der Druck nach der Richtung $MX = dM\ cos\ \vartheta$. Diese Richtung schließt mit (1. Fig.) der Tangente des Kreises ZMx, die durch M gehet, einen Winkel = 90° — ZYM = 90° — BOP ein, und es ist $BOP = \frac{\alpha - A}{a}$, wenn a den Halbmesser der Spindel bezeichnet. Zerlegt man also die Kraft MX nach der Richtung der Tangente, und auf ihr senkrecht, so wird jene = $dM\ cos\ \vartheta\ cos(90° - BOP) = dM\ cos\ \vartheta\ sin\ \frac{\alpha - A}{a}$. Mit der Richtung dieser Tangente schließt Mv den Winkel η ein; also

entspringt

entſpringt hieraus nach der Richtung Mv die Kraft $dM \cos\vartheta \sin \frac{\alpha - A}{a} \cos\eta$. Ferner entſpringt aus dem Gewicht dM nach der Richtung MP der Druck $dM \cos MTP = dM \sin\vartheta$, und dieſer giebt nach der Richtung Mv den Druck $- dM \sin\vartheta \sin\eta$. Daher iſt der geſammte Druck nach der Richtung $Mv = dM (\cos\vartheta \sin \frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta)$, und dieſer Druck durch die Maſſe dM dividirt giebt die geſuchte Beſchleunigung.

21. §.

Den Druck zu finden, welchen jedes Element M wegen der Zuſammenpreſſung des Waſſers leidet.

Aufl. Wenn h^2 jeden Querſchnitt der Röhre bezeichnet, und $h^2 p$ der Druck iſt, den das Element M nach der Richtung Mv leidet, ſo wird eben daſſelbe Element nach entgegen geſetzter Richtung den Druck $h^2 (p + dp)$ leiden, und daraus entſteht nach der Richtung Mv die Beſchleunigung $- \frac{h^2 dp}{dM} = - \frac{dp \cos\eta}{dA}$, weil $dM = \frac{h^2 dA}{\cos\eta}$ iſt. Hiezu addire man die im vorigen §. gefundene vom Gewicht des Elements herrührende Beſchleunigung, und ſetze die Summe dem im 19. §. gefundenen Ausdruck gleich, ſo erhält man folgende Gleichung $\cos\vartheta \sin \frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta - \frac{dp \cos\eta}{dA} = - \frac{2 \cos\eta}{dt} d. \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2 \sin\eta \tang\eta}{dt} d. \frac{dA}{dt}$. Wofern man dieſe Gleichung integriren kann, ſo iſt p gefunden. Weil man aber nur für einen gegebenen

Augenblick der Zeit t den Druck p ſucht, ſo muß t, alſo auch der davon abhängende Bogen α als eine beſtändige Gröſſe betrachtet werden. Man ſiehet ſogleich, wie das Integral gefunden werde, wenn man den Ausdruck $\frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cos\eta$ aus dem 19. §. für V gebraucht. Dies giebt $\cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta - \frac{dp\cos\eta}{dA} = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cos\eta$ woraus

$$dp\cos\eta = dA \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos d\cos\eta - dA \sin\vartheta \sin\eta + \frac{du\cos\eta}{dt\sqrt{u}} dA - \frac{da}{dt\sqrt{v}} dA$$

folgt, und die Integration giebt $p\cos\eta = C + a\cos\frac{\alpha - A}{a} \cos\vartheta \cos\eta - A\sin\vartheta \sin\eta + \frac{A\,du\cos\eta}{dt\sqrt{u}} - \frac{A\,dv}{dt\sqrt{v}}$. Eben die Gleichung findet Herr Euler a. a. O. 12. §. 271. S. Bey ihm das q, was hier p heißt, $\sqrt{u}$ hat das entgegengeſetzte Zeichen, weil er die Spindel nach APB umlaufen läßt, und s iſt bey ihm, was hier A heißt. Ueberdem iſt bey ihm der Bogen $Aa = p$, alſo $AP = p + s$, hier aber iſt $BP = \alpha - A$, und man hat $\sin\frac{\alpha - A}{a} = \sin\frac{p + s}{a}$, $\cos\frac{\alpha - A}{a} = -\cos\frac{p + s}{a}$.

Herr Hennert a. a. O. 14. §. 74. S. ſchreibt ſtatt $\frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du\cos\eta}{dt\sqrt{u}}$ den Ausdruck durch α und A aus dem 19. §. und dies giebt

$p\cos\eta$

$$p \cos\eta = C + a \cos\frac{\alpha - A}{a} \cos\vartheta \cos\eta - A \sin\vartheta \sin\eta$$

$$+ \frac{2A\cos\eta}{dt} d\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) - \frac{2A \sin\eta \tan\eta}{dt} d.\frac{d.A}{dt}.$$

Man darf nämlich die erwähnte Formul nur in der schon gefundenen Integralgleichung substituiren, und so müßte nun diese Gleichung auch mit der Hennertschen Integralgleichung a. a. O. einerley seyn. Aber Herrn Hennerts Gleichung ist hievon gänzlich verschieden. Er multiplicirt seine Differentialgleichung, die mit der obenstehenden nach völlig einerley ist, mit $d\alpha - dA$ und erhält

$$(d\alpha - dA)\cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - (d\alpha - dA)\sin\vartheta \sin\eta =$$

$$\frac{dp\, d\alpha \cos\eta}{dA} + dp\cos\eta = -\frac{2(d\alpha - dA)\cos\eta}{dt} d.$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2(d\alpha - dA)\sin\eta \tan\eta}{dt} d.\frac{dA}{dt}.$$

Nun integrirt er so, daß nicht allein A sondern auch α, ja $\frac{d\alpha}{dt}$ sowohl als auch $\frac{dA}{dt}$ veränderlich angenommen werden, und dies giebt $- a\cos\frac{\alpha - A}{a}\cos\vartheta\cos\eta - (\alpha - A)\sin\vartheta\sin\eta - \int$

$$\frac{dp\, d\alpha\cos\eta}{dA} + p\cos\eta + C = -\cos\eta.\left\{\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2 + \right.$$

$$\left. 2\sin\eta\tan\eta\left\{\int\frac{1}{dt} d\alpha\, d.\frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dt}\right)^2\right\}\right.. \text{ Dies Ver-}$$

fahren ist der richtigen Theorie ganz entgegen, und es verleiten den Herrn Hennert zu einer ganz falschen Auflösung seiner Hauptaufgabe. Man muß nicht mit $d\alpha - dA$, sondern mit dA multipliciren, so erhält man

$$dA \cos\vartheta \sin\frac{a-A}{a} \cos\eta - dA \sin\vartheta \sin\eta - dp \cos\eta =$$

$$-2\,dA\cos\eta \times \frac{1}{dt}\,d.\left(\frac{da}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + 2\,dA \sin\eta\, tang\,\eta \times \frac{\vartheta}{dt}$$

$d.\frac{dA}{dt}$. Was von t abhängt, alſo auch a, muß nun bey der Integration unveränderlich bleiben, es muß ſich nur A und p ändern, und dies vorausgeſetzt, erhält man

$$a\cos\vartheta\cos\frac{a-A}{a}\cos\eta - A\sin\vartheta\sin\eta - p\cos\eta + C =$$

$$-\frac{2A\cos\eta}{dt}\,d.\left(\frac{da}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2A\sin\eta\, tang\,\eta}{dt}\,d.\frac{dA}{dt},$$ welches völlig die vorhin herausgebrachte richtige Gleichung iſt, ſo wie ſie mit Herrn Eulers Gleichung überein kömmt.

22. §.

Ich werde demnach berechtiget ſeyn, dieſe richtige Gleichung in der Folge zu gebrauchen, da dann vor allen Dingen nun erfordert wird, die beſtändige Gröſſe C zu beſtimmen. Wenn dies geſchehen ſoll, ſo muß man zuforderſt feſtſetzen, ob die Waſſerſchnecke während des ganzen Umlaufs beſtändig mit Waſſer angefüllt angenommen werden ſoll, oder ob man annehmen will, daß von jedem Schraubengange nur ein Theil angefüllt ſey. Herr Hennert ſetzt das erſte voraus, und Herr Euler berechnet beyde Fälle beſonders. Nimmt man die erſte Vorausſetzung an, daß die Schnecke beſtändig ganz mit Waſſer angefüllet ſey, welches in die untere Oefnung ununterbrochen hinein, und aus der obern wieder herausfließt; ſo muß man auch zum Grunde ſetzen, daß die ganze Grundfläche ſich beſtändig unter Waſſer befinde, damit die untere Oefnung nie über dem Waſſer herauf ſteige. Dies widerſpricht

der Vorſchrift des 9. §. nicht, denn dort ward vorausgeſetzt, daß ſich bey jedem Umlauf nur der waſſerhaltende Bogen füllen, und die Schnecke nicht ununterbrochen flieſſen ſollte. Iſt nun PM = Y, ſo hat man $Y = A \times tang\, \eta$, und $A = Y\, cot\, \eta$. Wenn demnach die ganze Länge der Spindel O o = b iſt, ſo gehört der obern Oefnung bey C die Ordinate Y = b, und der Bogen $A = b\, cot\, \eta$ zu. Weil nun oben das Waſſer ausfließt, ſo muß $p = o$ ſeyn, wenn $A = b\, cot\, \eta$ iſt. (Der Druck der Atmoſphäre wird beyſeit geſetzt.) Setzt man dieſe Werthe in die für p gefundene Gleichung, ſo erhält man

$$C = -a\, cof \frac{\alpha - b\, cot\, \eta}{a}\, cof\, \vartheta\, cof\, \eta + b\, fin\, \vartheta\, cof\, \eta - \frac{b\, du\, cot\, \eta\, cof\, \eta}{dt\, \sqrt{u}} + \frac{b\, dv\, cot\, \eta}{dt\, \sqrt{v}}.$$

Wenn man hiemit noch die Vorausſetzung verbindet, daß die Umlaufs-Geſchwindigkeit der Spindel einmal gleichförmig werde, und man ſucht die Bewegung des Waſſers in der Schnecke für dieſen Zuſtand der Maſchine; ſo kann man das, was in du multiplicirt iſt, weglaſſen; weil für dieſen Zuſtand $du = o$ wird.

23. §.

Die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Schnecke zu finden, vorausgeſetzt, daß die untere Oefnung beſtändig unter Waſſer bleibe, und die Umlaufsgeſchwindigkeit ſchon unveränderlich ſey.

Aufl. Für die untere Oefnung bey a, wo das Waſſer hineintritt, ſey $p = \pi$, ſo iſt zugleich $A = o$, und dies in die Gleichung des vorigen §. geſetzt giebt

$$\pi\, cof\, \eta = C + a\, cof \frac{\alpha}{a}\, cof\, \vartheta\, cof\, \eta.$$

Setzt

...gefundenen Werth, und divi-

$$\ldots = \frac{\alpha - b\cot\eta}{a}\cos\vartheta + b\sin\vartheta +$$

...finden, muß man zuerst einen Ausdruck ...untern Oefnung unter Wasser suchen, der sich ...des §. ergiebt. Es ist nämlich die Höhe eines ... über eine durch B horizontal gelegte Ebene =

$(\ldots - A\ldots)\tan\eta\sin\vartheta + a\,(1 + \cos\frac{AP}{a})\cos\vartheta$, weil das ... hier a heißt. Für den Punct a, oder die untere Oefnung ist $AP = Aa = a.\pi - \alpha$, also wird des Puncts a Höhe über die durch B horizontal gelegte Ebene $= a\,(1 + \cos\frac{a.\pi - \alpha}{a})\cos\vartheta$. Ist nun die Höhe des Wassers über den Mittelpunct der Grundfläche $= c$, so ist die Höhe des Wassers über $B = c + a\cos\vartheta$, folglich die Tiefe des Puncts a unter Wasser $= c - a\cos\frac{a\pi - \alpha}{a}\cos\vartheta$, oder $= c + a\cos\frac{\alpha}{a}\cos\vartheta$. Weil nun das Wasser mit der Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ in a hinein fließt, so gehört der Druck für diese Stelle der Höhe $c + a\cos\frac{\alpha}{a}\cos\vartheta - v.$ zu, und dies statt π gesetzt, giebt die Gleichung

$$\varepsilon = -a\cos\frac{\alpha - b\cot\eta}{a}\cos\vartheta + b\sin\vartheta + \frac{b\,dv}{\sin\eta\,dt\sqrt{v}} + v.$$

Eben diese Gleichung findet Herr Euler a. a. O. §. 40. p. 295. Um die Vergleichung anzustellen, muß man sich aus dem §. erinnern, daß das hiesige α beym Herrn Euler $a\pi - p$, also

$\alpha - b\cot\eta$

$u - b\cot\eta = a\pi - p - b\cot\eta$, folglich $\cos\frac{u - b\cot\eta}{a} = -\cos\frac{p + b\cot\eta}{a}$ sey. Dies giebt Herrn Eulers Ausdruck $c = a\cos\frac{p + b\cot\eta}{a}\cos\vartheta + b\sin\vartheta + \frac{b\,dv}{\sin\eta\,dt\sqrt{v}} + v$. Hiebey möchte nun nachfolgendes zu erinnern seyn. Der Werth von π scheinet wegen der Umlaufsbewegung noch einer Verbesserung zu bedürfen. Wenigstens alsdenn, wenn die Schraube nach BPA zu umläuft, scheint der Druck gegen die untere Oefnung größer zu seyn. Wenn die Umlaufsbewegung schon gleichförmig geworden ist, und man setzt alsdenn die Geschwindigkeit der Oefnung a, womit sie jetzt im Kreise umläuft $= \sqrt{k}$; so scheint es, daß man $\pi = c + a\cos\frac{u}{a}\cos\vartheta + k - v$ setzen müße. Dies würde indessen auf die folgenden Rechnungen weiter keinen Einfluß haben, als daß man allenthalben $c + k$ statt c schreiben müßte. Ich will mich hierüber bald noch etwas näher erklären.

24. §.

Setzt man den Winkel $AOa = \phi$, also $Aa = a\pi - a = p = a\phi$; so wird $da = -ad\phi$: und weil nun $\frac{da}{dt} = \sqrt{k}$ ist, so erhält man $dt = -\frac{a\,d\phi}{\sqrt{k}}$. Setzt man ferner $\frac{b\cot\eta}{a} = \gamma$, oder $b\cot\eta = a\gamma$, und $b = a\gamma\tang\eta$; so erhält man $\frac{b}{\sin\eta\,dt} = -\frac{\gamma\sqrt{k}}{\cos\eta\,d\phi}$, folglich $c = a\cos(\phi + \gamma)\cos\vartheta + a\gamma\tang\eta\sin\vartheta - \frac{\gamma\,dv\sqrt{k}}{\cos\eta\,d\phi\sqrt{v}} + v$. Noch setze man $2\sqrt{k}\theta = z$, also v

$= \frac{zz}{4k}$, und $dv = \frac{z\,dz}{2k}$, $dv\sqrt{k} = \frac{z\,dz}{2\sqrt{k}}$ folglich $\frac{dv\sqrt{k}}{\sqrt{v}} = dz$.

Dieſe Werthe in die gefundene Gleichung geſetzt geben $c\,cos\eta\,d\phi = a\,cos(\phi+\gamma)\,cos\vartheta\,cos\eta\,d\phi + a\gamma\,sin\eta\,sin\vartheta\,d\phi$

$$-\gamma\,dz + \frac{zz}{4k}\,d\phi\,cos\eta, \text{ oder}$$

$$-\gamma\,dz + \frac{zz}{4k}\,d\phi\,cos\eta + a\,d\phi\,cos(\phi+\gamma)\,cos\vartheta\,cos\eta$$

$$= (c.\,cos\eta - a\gamma\,sin\eta\,sin\vartheta)\,d\phi.$$

Die bisher bekannten Kunſtgriffe der Integralrechnung reichen nicht hin, das Integral dieſer Gleichung zu finden, ohne nur in dem beſondern Fall, wenn die Spindel vertical ſteht, alſo $sin\vartheta = 1$, und $cos\vartheta = o$ iſt. Alsdenn hat man

$-\gamma\,dz + \frac{zz}{4k}\,d\phi\,cos\eta = (c.\,cos\eta - a\gamma\,sin\eta)\,\vartheta\phi$; oder wenn $\frac{b\,cot\eta}{a}$ ſtatt γ wieder geſetzt wird

$$-\frac{b}{a\,sin\eta}\,dz + \frac{zz}{4k}\,d\phi = (c-b)\,d\phi,$$

woraus $\frac{a\,sin\eta}{b}\,d\phi = -\frac{4k\,dz}{4k(c-b) - zz}$ folgt, oder auch

$$\frac{a\,sin\eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\,d\phi = -\frac{dz : \sqrt{4k(c-b)}}{1 - zz : (4k(c-b))}.$$

Das Integral hievon iſt

$\frac{a\,sin\eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\,\phi = C - \frac{1}{2}\,l\,\frac{1 + z : \sqrt{4k(c-b)}}{1 - z : \sqrt{4k(c-b)}}$; und weil $\frac{z}{\sqrt{4k}} = \sqrt{v}$ war, ſo erhält man $\frac{a\,sin\eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\,\phi = C - \frac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt{(c-b)} + \sqrt{v}}{\sqrt{(c-b)} - \sqrt{v}}$. Die beſtändige Größe C muß aus dem anfänglichen Zuſtande der Bewegung beſtimmt werden. Nimmt man an, daß $\sqrt{v} = o$ ſey, wenn $\phi = o$ iſt, ſo wird $C = o$, und

$\frac{2a\sin\eta\sqrt{(c-l.)}}{b\sqrt{4k}}\Phi = -l\frac{\sqrt{(c-b)}+\sqrt{v.}}{\sqrt{(c-b)}-\sqrt{v}}$. Beym Fortgang der Bewegung, wenn die untere Oefnung von A durch α, b, β, u. s. f. umläuft, wird nun Φ negativ, und dies giebt $\frac{\sqrt{(c-b)}+\sqrt{v}}{\sqrt{(c-b)}-\sqrt{v}} = \rho\frac{2a\sin\eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\Phi$, woraus $\sqrt{v} = \frac{\rho\psi-1}{\rho\psi+1}\sqrt{(c-b)}$ folgt, wenn der Kürze wegen ψ statt $\frac{2a\sin\eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\Phi$ geschrieben wird.

25. §.

Wenn man nun aus dieser Gleichung Schlüße ziehen wollte, so wäre vornehmlich zu erwägen, in wie weit die angenommenen Bestimmungen für den anfänglichen Zustand der Bewegung bestehen können. Es ist angenommen worden, daß dem Werth, $\Phi = o$ der Werth $v = o$ zugehöre, und diese Voraussetzung würde ihre Anwendung finden, wenn man annähme, die Schnecke sey anfangs ganz mit Wasser angefüllt und die untere Oefnung verschlossen gewesen, hierauf aber, nachdem die Schnecke beym Umlauf um ihre Axe, und mit ihr das Wasser in der Röhre, schon die Geschwindigkeit $\sqrt{k}$ erreicht hatte, die untere Mündung plötzlich eröfnet worden. In solchen Fällen also, wo es mit der Bewegung der Wasserschraube diese Bewandniß hätte, würde die Gleichung $\sqrt{v} = \frac{\rho\psi-1}{\rho\psi+1}\sqrt{(c-b)}$ ihre Anwendung finden, und weil der Werth von $\rho\psi$ mit Φ sehr schnell wächst, so würde die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre sehr bald unveränderlich und $\sqrt{v} = \sqrt{(c-b)}$ werden. Diese beständige Geschwindigkeit würde man auch aus der Differential-Gleichung finden, wenn man $d\Phi = o$ setzte. Ueberhaupt aber ergeben diese Schlüsse, daß das Wasser nur unter der Bedingung in der Röhre würde hinauf steigen können, wenn $c > b$ wäre, oder vielmehr der am Ende des

23. §. beygefügten Erinnerung gemäß, wenn $c+k>b$ wäre. Eigentlich wird allemal $b>c$ ſeyn, wenn es alſo mit der eben erwehnten Erinnerung ſeine Richtigkeit hat, ſo kann das Waſſer nur alsdenn in der Röhre ſteigen, wenn $k>c-b$ iſt. Wenn $b>c$ iſt, (man kann $c+k$ ſtatt c verſtehen) und man ſetzt nun

$\rho \frac{2 a \sin \frac{1}{2} \sqrt{(b-c)}}{b\sqrt{4k}} \phi = \psi$, ſo hat man $\sqrt{v} = \frac{\rho\psi\sqrt{-1}-1-1}{\rho\psi\sqrt{-1}+1}\sqrt{(b-c)}\sqrt{-1}$, alſo $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{(b-c)}} = -\frac{\rho\psi\sqrt{-1}-1-1}{(\rho\psi\sqrt{-1}+1)\sqrt{-1}}$

$= -\tang \frac{1}{2}\psi$. Dieſer Ausdruck giebt die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Röhre, falls die Spindel nach BPA zu umläuft, gleich vom erſten Augenblick der Bewegung negativ, und daraus erhellet, daß das Waſſer gar nicht ſteigen könne, ſondern ſogleich anfangen müße, zurück nach unten zu fließen. Uebrigens aber kann die Gleichung nicht dienen, beym Fortgang der Bewegung die Geſchwindigkeit des zurückfließenden Waſſers daraus zu berechnen, weil die Rechnung im 22. §. vorausſetzt, daß die Röhre beſtändig voll Waſſer bleibe.

26. §.

Es ließ ſich voraus ſehen, daß die Rechnung dies Reſultat geben müße, wofern aus dem beſtändigen Anſtoß der untern Mündung an die im Wege liegenden Waſſertheilchen nicht ein ſolcher Druck entſteht, der das Waſſer hinauf zu treiben im Stande iſt. Aus der Schwungbewegung um die Axe der Spindel können hier gar keine Kräfte entſtehen, die das Waſſer hinauf treiben, weil die Richtung aller Schwungkräfte hier auf der centriſchen Linie der Röhre ſenkrecht iſt, und die geſammte Wirkung der Schwungkräfte hier von der Röhre ſelbſt völlig aufgehalten wird. Mit der Maſchine des Herrn de Mour, worüber Herr Euler in der Hiſtoire de l'Academie de Berlin A. 1751. pag. 303. ſeqq.

seqq. eine umständliche Untersuchung angestellet hat, wird das Wasser deswegen zum Steigen gebracht, weil die Richtung der Schwungkräfte auf der centrischen Linie der Röhre nicht senkrecht ist, und daher ihre Wirkung von der Röhre nicht ganz aufgehoben werden kann. Was übrigens den Druck gegen die untere Mündung der um die Spindel gewundenen Röhre betrift, so müßte man bey einer genauern Rechnung noch erwegen, daß dieser Druck beym Fortgang der Bewegung nicht unveränderlich bleiben würde. Durch den Umlauf der Spindel wird auch dem Wasser an der Stelle, wo die Schraube steht, eine wirbelförmige Bewegung ebenfalls nach BPA zu mitgetheilt. Wegen dieser eigenen Bewegung der Wassertheilchen, welche der untern Mündung unterweges aufstossen, hängt die Wirkung des Stosses nur von der respectiven Geschwindigkeit der untern Mündung in Ansehung der Geschwindigkeit des Wassers selbst ab, die also so lange veränderlich bleiben würde, als sich noch die Geschwindigkeit des Wassers ändert. Wenn alles so weit in den Beharrungsstand gekommen wäre, daß das Wasser in demselben Kreise, den die untere Mündung durchläuft, ebenfalls mit der Geschwindigkeit $\sqrt{k}$ umliefe, so würde weiter kein Druck gegen die Mündung wegen des Anstosses entstehen, weil nun eigentlich gar kein Anstoß weiter erfolgen könnte. Demnach könnte das Wasser in der Schnecke gar nicht steigen.

27. §.

Ob nun gleich der bisher betrachtete Fall, wenn die Spindel der Wasserschraube vertical stehet, in der Ausübung nicht vorkömmt, weil sie allemal gegen den Horizont schief gelegt wird; so dienen doch die bisherigen Schlüße dazu, auch ohne weitere Rechnung zu übersehen, was bey der geneigten Lage der Spindel erfolgen müsse. Auch in diesem Falle können die Schwungkräf-

te dazu nichts beytragen, daß das Waſſer in der Röhre zu ſteigen genöthiget werde. Wenn dies erfolgen ſollte, ſo müßte der von dem Anſtoß der untern Mündung an die im Wege liegenden Waſſertheilchen herrührende Druck dies zuwege bringen, der jedoch veränderlich ſeyn, mit dem Fortgang der Bewegung abnehmen, und zuletzt gar aufhören würde. Es ſcheinet alſo, daß man hieraus mit ziemlicher Sicherheit ſchließen könne, die Waſſerſchraube könne das Waſſer nie ununterbrochen heben, was man ihr auch für eine Lage gegen den Horizont geben wollte. Herr Euler entſcheidet hierüber nichts, er bricht hier ſeine Unterſuchungen ab, erklärt die Theorie der Waſſerſchraube für höchſt ſchwer, und fodert andere Geometer auf, ihre Kräfte bey dieſer Aufgabe gleichfalls zu verſuchen. Eben dies hat auch wohl veranlaſſet, daß von der Berliniſchen Academie der Wiſſenſchaften im Jahre 1765. dieſe Aufgabe iſt zur Preisfrage aufgegeben worden, und ich werde nun näher prüfen, wie weit H. Hennert die Preisaufgabe aufgelöſt habe.

28. §.

Er nimmt an, die Geſchwindigkeit $\sqrt{v}$ des Waſſers in der Röhre werde beym Fortgang der Bewegung unveränderlich: eine Vorausſetzung, die, wie man leicht ſiehet, bewieſen werden muß, bevor ſie als ausgemacht angenommen werden kann. Iſt ſie wahr, ſo muß aus der Differentialgleichung, wenn in derſelben $dz = 0$ geſetzt wird, eine Gleichung folgen, die $z = 2\sqrt{kv}$ allein durch beſtändige Gröſſen beſtimmt. Aber die Differentialgleichung (24. §.) giebt $\frac{zz}{4k} \cos\eta + a\cos(\Phi+\gamma)\cos\Im\cos\eta = c.(\cos\eta - a\gamma\sin\eta\sin\Im)$, wenn $dz = 0$ geſetzt wird, woraus $\frac{zz}{4k} = v = c - a\gamma\,tang\,\eta\sin\Im - a\cos(\Phi+\gamma)\cos\Im$ folgen würde. Weil dieſer

ſer Ausdruck offenbar von der veränderlichen Größe ϕ abhängt, ſo widerſpricht die Folge der Vorausſetzung, und es ergiebt ſich, daß die Geſchwindigkeit $\surd v$ nie unveränderlich werden könne. Dieſe Gleichung würde alſo nur nach Beſchaffenheit der Umſtände einen größten oder kleinſten Werth geben. Ja wenn c nichts weiter als die Tiefe bedeutet, um welche der Mittelpunct der Grundfläche unter Waſſer ſteht, ſo würde ſogar $\surd v$ unmöglich werden. Es war nämlich $a\gamma = b\cot\eta$ (24. §.) alſo würde $v = c - b\sin\vartheta - a\cos(\phi+\gamma)\cos\vartheta$ negativ werden, weil $b\sin\vartheta > c$ iſt.

29. §.

Man wird ſich aber aus dem 21. §. erinnern, daß H. Hennert wegen eines Verſehens bey der Integration eine unrichtige Differentialgleichung herausgebracht habe, und deswegen wird man vermuthen, daß aus ſeiner Differentialgleichung eine ſolche unveränderliche Geſchwindigkeit folge. Ich will verſuchen, ob ich ihm in ſeinen Schlüſſen folgen kann. In der Gleichung für p, (21. §.) ſo wie ſie H. Hennert heraus bringt, ſetze man $A = b\cot\eta$, und $p = o$, dem 22. §. gemäß, das Integral $\int \frac{dp\,d\alpha\cos\eta}{dA}$ nehme man ſo, daß es mit p zugleich verſchwindet, und bey eben dieſer Vorausſetzung $A = b\cot\eta$, ſey $-\cos\eta.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2 = M$, ſo wie $2\sin\eta\tan\eta\left(\int\frac{1}{dt}\,d\alpha\,d.\frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dt}\right)^2\right) = N$.

(Ich muß ſo nachrechnen, wie H. Hennert mir vorrechnet, ſonſt müßte hier alles, was von t abhängt, unveränderlich bleiben.) Dies giebt $-a\cos\frac{\alpha - b\cot\eta}{a}\cos\vartheta\cos\eta - (\alpha - b\cot\eta)\sin\vartheta\sin\eta + C = M + N$, und es wird die beſtändige Größe $C = M + N + a\cos$

$a \cos\frac{\alpha - b\cot\eta}{a} \cos\vartheta\cos\eta + (\alpha - b\cot\eta)\sin\vartheta\sin\eta$. Setzt man dieſen Werth ſtatt C in die Hennertſche Integralgleichung im 21. §. ſo müßte nun eine Gleichung kommen, woraus ſich p finden ließe, wenn $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{u}$, und $\frac{dA}{dt} = \cos\eta\sqrt{v}$ (19. §.) als bekannt angeſehen werden. Nach H. Hennerts Rechtung würde das nun noch nicht angehen, weil in ſeiner Gleichung noch das Integral $\int\frac{dp\,d\alpha\cos\eta}{dA}$ vorkömmt, und bey ihm α ſowohl als A veränderlich iſt. Mit dieſem Integral aber wird H. Hennert ſo fertig. Er nimmt gleich an, nach Verlauf einiger Zeit werde nicht allein die Umlaufs-Geſchwindigkeit der Spindel, ſondern auch die Geſchwindigkeit des Waſſers in der Röhre $\sqrt{v}$ unveränderlich, alſo ſey alsdenn $\frac{d\alpha}{dA} = \frac{\sqrt{u}}{\cos\eta\sqrt{v}}$ unveränderlich, und findet dieſer Vorausſetzung gemäß $\int\frac{dp\,d\alpha\cos\eta}{dA} = \frac{p\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$, da er denn k ſtatt des hieſigen u ſchreibt, ſo wie auch oben im 23. ſtatt u der Buchſtab k gebraucht iſt, für den Fall, wenn die Umlaufsbewegung gleichförmig wird. Nach H. Hennert iſt aber von nun an auch $\sqrt{v}$ unveränderlich. Hiernächſt nimmt er nun dem 23. §. gemäß in ſo weit ganz richtig an, für die untere Mündung der Röhre gehöre der Druck der Höhe $c + a\cos\frac{\alpha}{a}\cos\vartheta - v$ zu; ſetzt in ſeiner Gleichung für p den eben erwehnten Werth ſtatt p, und zugleich $A = o$. So müßte nun freylich eine Gleichung heraus kommen, woraus v gefunden werden könnte: weil aber nach ſeiner Vorausſetzung nun $\sqrt{v}$ ſchon unveränderlich ſeyn ſoll; ſo muß man auch $d.\sqrt{v} = o$, alſo $d.\frac{dA}{dt} = o$, oder $ddA = o$ ſetzen, und dies

müßte

müßte eine Gleichung zwischen v oder $\sqrt{v}$ und lauter beständigen Größen gehen. Es wird mir in der That schwer, dem H. Hennert in seinen Schlüssen weiter nachzufolgen. Entweder ich verstehe den 15. §. der Preisschrift gar nicht, oder H. Hennert versieht sich hier nochmal, wenn er schließt: für die untere Mündung ist $A = o$, also auch $dA = o$ und $ddA = o$. Soviel ist wahr, daß nach seiner Voraussetzung $ddA = o$ sey, weil er $\sqrt{v} = \frac{dA}{dt \cos\eta}$ unveränderlich annimmt: aber $dA = o$ setzen, heißt das hier nicht eben soviel, als $\sqrt{v} = o$ setzen? Gesetzt auch, H. Hennert wollte antworten, man müße bey dieser Rechnung A nicht als eine Function von t betrachten, sondern nur als eine veränderliche Größe, wovon die Gestalt der Röhre abhängt; so ist es ja doch falsch geschlossen: wenn eine veränderliche Größe in einem bestimmten Fall $= o$ wird, so wird auch ihr Differential $= o$. Herrn Hennerts Schluß wäre richtig, wenn A den unveränderlichen Werth $= o$ haben müßte, und das ist hier der Fall gar nicht. Ich muß indessen mit H. Hennert weiter rechnen, und seinen Schlüssen gemäß $\cos\eta \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2 = \frac{\cos\eta \cdot d\alpha^2}{dt^2} = \cos\eta \cdot k$, und überdem $2 \sin\eta \operatorname{tang}\eta \left(\int \frac{1}{dt} d\alpha\, d.\frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}.\frac{dA^2}{dt^2}\right) = o$ setzen. Wenn ich alsdenn Kürze halber π statt $\varepsilon + a \cos\frac{\alpha}{a} \cos\Im - v$ schreibe, so verwandelt sich H. Hennerts Gleichung (21. §.) in folgende: $$-a \cos\tfrac{\alpha}{a} \cos\Im \cos\eta - a \sin\Im \sin\eta - \frac{\pi\sqrt{k}}{\sqrt{v}} + \pi \cos\eta + M + N + a \cos\frac{\alpha - b\cot\eta}{a} \cos\Im \cos\eta + (\alpha - b\cot\eta) \sin\Im \sin\eta = -k\cos\eta.$$

Nun ſollte $M = -\cos\eta\,(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt})^2$, und $N = 2\sin\eta\,\tan\eta\,(\int \frac{1}{dt}\,d\alpha\,d.\frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}.\frac{dA^2}{dt^2})$ ſeyn, in der Vorausſetzung, daß $A = b\cot\eta$ genommen werde. Ich wüßte nicht, wie ich das machen ſollte, dieſe Werthe herauszubringen: mit H. Hennert aber ſetzt man $\frac{d\alpha}{dt} = \surd k$, $\frac{dA}{dt} = \cos\eta\surd v$, $= \int d.\frac{dA}{dt}$, und man findet $M = -\cos\eta\,(\surd k - \cos\eta\surd v)^2$, $N = 2\sin\eta\,\tan\eta\,\times(\cos\eta\surd kv - \frac{1}{2}v\cos\eta^2) = 2\sin\eta^2\surd kv - \sin\eta^2\cos\eta\,v$. Man wird leicht ſehen, wenn dieſe Werthe ſtatt M und N geſetzt werden, was die Gleichung für eine Geſtalt annimmt, es wird völlig diejenige, die H. Hennert ſelbſt herausbringt auf der 76. S. der Preisſchrift. Um die Vergleichung deſto beſſer anzuſtellen, bemerke ich nur, daß das hieſige η, ϑ, b, beym H. Hennert ϕ, $90° - \vartheta$, und c heiße, und was hier c heißt, iſt bey ihm $h - a\sin\vartheta$. Die gefundene Gleichung müßte nun außer v keine andre als beſtändige Gröſſen enthalten, $\surd k$ auch für eine beſtändige Größe genommen. Aber ein einziger Blick auf die Gleichung ergiebt ja, daß noch außerdeme der Bogen α darinn vorkomme. Wenn man z ſtatt $\surd v$ ſchreibt und die Gleichung nach den Potenzen von z ordnet, ſo wird ſie cubiſch. H. Hennert rechnet weiter, und bringt heraus, daß dieſe cubiſche Gleichung zwey unmögliche Wurzeln, und eine negative Wurzel habe, alſo $z = \surd v$ allemal negativ ſey. Uebrigens hängt doch ſeine Formul für dieſe negative Wurzel noch immer von dem veränderlichen Bogen α ab, und ich begreife nicht, wie dies mit der Vorausſetzung beſtehen könne, daß nun $\surd v$ unveränderlich ſey. Ferner würde ja der negative Werth von $\surd v$ anzeigen, daß das Waſſer in der Röhre nicht gegen die obere Oefnung zu, wie während der Rechnung vorausgeſetzt iſt, ſondern gegen die untere Oefnung zu laufe, und das hieße; die Schnecke kann gar kein Waſ-

ſer

ser heben. H. Hennert erklärt sich über seinen negativen Werth von $\sqrt{v}$ ganz anders. Er sagt, dies komme daher, weil das Wasser steigend in die Schnecke hineindringe, und fallend heraus trete. Steigen und Fallen aber entgegengesetzte Bewegungen seyn. Wie doch ein Irrthum immer mehrere nach sich zieht! Bezeichnet denn nicht $\sqrt{v}$ unbestimmt die Geschwindigkeit des durch einen jeden Querschnitt der Röhre laufenden Wassers, sowohl dessen, was oben ausläuft, als auch dessen, was unten eintritt?

30. §.

Am meisten wundre ich mich darüber, daß dasjenige, was H. Hennert im 16. §. 78. S. der Preisschrift vorträgt, ihn nicht auf das fehlsame seiner Theorie aufmerksam gemacht hat. Hier soll die Menge Wasser bestimmt werden, welche die Schnecke in gegebener Zeit t heben wird. Diese müßte $= f^2 t \sqrt{v}$ seyn, wenn f^2 den Querschnitt der Röhre bedeutet. Aber, heißt es hier, man muß bemerken, daß das Wasser nicht ununterbrochen durch die Schnecke fließe. Dies lehrt die Erfahrung nach H. Hennerts Bericht bey den in Holland jetzt üblichen Wasserschnecken, deren Grundflächen ganz unter Wasser stehen. Das Wasser hört auf zu fließen, noch ehe die Spindel den halben Umlauf vollendet hat: während des übrigen Theils eines Umlaufs fließt nichts heraus. Fließt es denn nicht etwa während dieser Zeit erstlich um eine gute Strecke zurück, und kehrt nachher wieder um? oder bleibt es während dieser Zeit in der Röhre ruhig? darüber erklärt sich H. Hennert nicht. Aber dem sey, wie ihm wolle, wenn das Wasser während eines jeden Umlaufs zu fließen aufhört, und eine zeitlang nachher wieder anfängt zu fließen, wie läßt sich denn in aller Welt die Voraussetzung rechtfertigen, daß $\sqrt{v}$ unveränderlich werde? Hier muß H. Hennert doch wirklich die Schwäche seiner Theorie gefühlt

haben. Denn gegen das Ende des 16. §. wo er die Waſſermenge bloß aus einigen Beobachtungen beſtimmt, und ohngefehr ein Mittel genommen, auf $\frac{2}{3} f^2 t \sqrt{v}$ ſchätzt, ſetzt er hinzu: les remarques, que nous venons de faire, ſont tres importantes pour la theorie de cette machine. Elles ont echappé aux Mechaniciens (das denke ich eben nicht, denn die meiſten, welche ich habe nachſchlagen können, ſagen, daß das Waſſer aus der Schnecke nicht ununterbrochen fließe.) Cependant elles ne laiſſent pas que de rendre la theorie un peu incertaine.

31. §.

Weil Erfahrungen, die man mit der Theorie vergleichen kann, vorzüglich intereſſant ſind, ſo will ich noch diejenigen herſetzen, welche H. Hennert im 17 bis 20 §. vom Effect einiger Waſſerſchrauben erzählt. Die in Holland ehedem üblich geweſenen Waſſer-Schrauben, welche Waater-Mooler hießen, und zur Austrockung der Wieſen gebraucht wurden, lagen faſt horizontal, und hoben das Waſſer auf eine ſehr geringe Höhe. Wenn ſie das Waſſer 4 Fuß hoch heben, ſo heißen ſie Sheprad-Moolen, und in der Herrſchaft Hazerswoude nahe bey Leiden hat man vier dergleichen Schrauben über einander geſtellt, um das Waſſer 16 Fuß hoch zu heben. Ohngefehr um das Jahr 1754. ward von einigen Kunſtverſtändigen in Vorſchlag gebracht, den Neigungswinkel gegen den Horizont 60° groß zu machen, um das Waſſer auf größere Höhen zu bringen. Vielleicht verfiel man daher darauf, weil Daniel Bernoulli dieſen Winkel angegeben hat. Man zog H. Luloſs zu Rath, und auf deſſen Empfehlung wurden dergleichen Maſchinen mit Waſſerſchrauben unter dem Winkel von 60° erbauet, die den Namen Vyzel-Moolen erhalten haben. Alle werden durch Windflügel getrieben.

Mit

Mit dreyen Vyzel-Moolen, die, wie es ſcheint, nicht weit von einander angelegt ſind, und welche H. Hennert durch die Namen der nordlichen, der mittlern und der ſüdlichen nach ihrer Lage unterſcheidet, hat man Erfahrungen angeſtellet. Um jede Spindel ſind drey Röhren gewunden, deren viereckte Oefnungen um gleiche Bogen von einander abſtehen. Die Oefnung der Gänge an der nordlichen Schraube beträgt 1, 36 Quadr. Fuß, an der mittlere 1, 46 Q. F. und an der ſüdlichen 1, 41 Q. F. die Halbmeſſer ihrer Spindeln ſind 35, 37, 36 Zoll, die Winkel γ ſind 11° 55′, 14° 42′, 11° 54′, dieſe findet man aus den Entfernungen der Schraubengänge, welche 23, 29, 24 Zoll betragen. Der Winkel ϑ iſt für alle = 60 Grad, die ganze Länge der Spindel 14½ Fuß, und ſie ſtehen ohngefehr 4 Fuß tief unter Waſſer. (Ich ſetze dieſe Zahlen alle ſo her, wie ſie auf der 81. S. der Preisſchrift ſtehen, werde aber unten verſchiedenes dabey erinnern müßen.) Man hat jede dieſer Mühlen eine Zeitlang arbeiten laſſen, und die in dieſer Zeit gehobene Menge Waſſer gemeſſen; auch hat man die Anzahl der Umläufe der Windflügel bemerkt, und daraus die Zahl der Umläufe der Schrauben geſchloſſen, wovon vermöge der Einrichtung der Maſchine beynahe anderthalb auf einen Umlauf der Windflügel kammen.

32. §.

Der Erfahrungen ſelbſt ſind an der Zahl 17, die alle auf der 82 Seite der oft erwehnten Preisſchrift ſtehen. H. Hennert verwirft aber die erſte, vierte, zehnte, dreyzehnte, vierzehnte, und ſechszehnte, als ſolche, die zu weit von ſeiner Theorie abweichen. Die übrigen ſtehen auf der 84 S. nochmal, aber die dortigen Zahlen kommen mit den auf der 82 S. befindlichen nicht alle überein. H. Hennert hat aus der Anzahl der Umläufe die Winkelgeſchwindigkeit der Spindel, und daraus die Geſchwindigkeit der in der

centriſchen Linie der Röhre liegenden Puncte geſchloſſen, welches hier $2 \surd g k$ wäre. Dieſe letztern Geſchwindigkeiten ſind größtentheils auf der 84 S. anders als auf der 82 S. angegeben. Ich ſetze ſie ſo her, wie ſie auf der 84 Seite ſtehen.

Erfahrungen.	Winkelgeſchwindigkeit der Spindel.	Werth von $z \surd g k$.	Waſſermenge in Cub. Fußen für 1 Minute	Namen der Schrauben.
2	81°	4, 10	181	nordliche Schraube.
3	98° 30′	4, 95	227	
5	117°	5, 93	273	
7	79°	4, 50	217	
8	85° 30′	4, 60	228	mittlere Schraube.
9	108°	6, 94	294	
11	130°	7, 00	356	
12	124°	6, 52	367	ſüdliche Schraube.
15	121° 30′	6, 52	beyde zuſ.	die mittlere
		6, 35	648	u. ſüdliche.
17	187° 15′	9, 46	alle drey Schrauben	
		10, 00	zuſammen	
		9, 77	1140.	

Dieſe Erfahrungen vergleicht nun H. Hennert mit ſeiner Theorie, aber ich weis in der That ſelbſt nicht recht auf welche Art. Seine Gleichung für $\surd v$ hängt von α ab, und weil $\frac{d\alpha}{dt} = \surd k$ iſt, ſo iſt $\alpha = t \surd k$. Dies iſt nämlich der Weg, den die untere Mündung der Röhre in der Zeit t durchläuft. Setzte nun H. Hennert $t \surd k$ ſtatt α in die Gleichung, ſo würde $\surd v$ von t abhängen, und ſich folglich mit t ändern. Aber es ſoll $\surd v$ unveränderlich ſeyn, und dieſe einmal zum Grunde geſetzte Vorausſetzung

ſetzung bringt H. Hennert dahin, daß er den Bogen x für das anſieht, was ſonſt Geſchwindigkeit heißt. Daher ſetzt er auf der 81. S. $x = \sqrt{60\,k}$, und nimmt alſo x für die Geſchwindigkeit, die der Höhe k zugehört. Dies iſt ein neuer Irrthum, der zu den vorigen noch hinzu kömmt, alſo iſt es wohl nicht zu verwundern, daß die von ihm angeführten Erfahrungen ſo wenig mit ſeiner Theorie zuſammen treffen wollen. Alle Waſſerſchrauben haben ſehr viel weniger Waſſer in einer Minute gegeben, als ſie nach Herrn Hennerts Rechnung thun ſollten, und der Fehler hat bald ein Drittel bald die Hälfte der ganzen berechneten Waſſermenge betragen: gewöhnlich iſt er zwiſchen dieſe Gränzen gefallen. Das meint nun zwar H. Hennert nicht: nach ihm beträgt die gröſte Abweichung der beobachteten Waſſermengen etwa nur den 9ten oder 10ten Theil der nach ſeiner vermeintlichen Theorie berechneten, und zwey Beobachtungen geben faſt gerade eben das, was er nach der Theorie gefunden zu haben angiebt. Allein H. Hennert verbirgt hier die gröſſere Abweichung ſeiner Theorie von der Erfahrung auf eine ganz künſtliche Art. Er reducirt erſtlich das eigentliche Reſultat ſeiner Theorie auf denjenigen Theil, worauf er ihn nach einer andern **aus der Erfahrung geſchloſſenen Regel** reducirt wiſſen will, die auf der 78. und 79. S. der Preisſchrift ſtehet, und hier ſchon im §. angeführt iſt. Dieſe reducirte Waſſermenge vergleicht er nun wieder mit derjenigen, welche die im Anfang dieſes §. angeführten Erfahrungen gegeben haben. Die Zahlen, welche er angiebt, ſind folgende.

Erfahrungen.	berechnete Waſſermenge.	reducirte Waſſermenge.	beobachtete Waſſermenge.	Diff.
2	273 C. Fuß	182	181	1
3	386	258	227	31
5	529	252	273	80
7	406	271	217	54
8	365	243	228	25
9	487	325	294	31
19	659	430	356	74
12	557	371	367	4
15	1068	712	648	64
17	2183	1453	1140	313

Ob nun gleich bey der erſten Erfahrung die beobachtete Waſſermenge von der berechneten um ein Drittel der letztern abweicht, ſo ſagt H. Hennert doch, ſie weiche gar nicht ab, weil die beobachtete Waſſermenge mit der reducirten übereinkömmt, und obgleich bey der letzten Erfahrung die beobachtete Waſſermenge wenig mehr als die Hälfte der berechneten ausmacht, und ſelbſt die Differenz von der reducirten Waſſermenge nicht viel weniger als $\frac{1}{4}$ der letztern ausmacht; ſo will H. Hennert doch nicht, daß der Fehler mehr als ohngefehr $\frac{1}{15}$ oder $\frac{1}{9}$ betrage, denn, ſagt er, man muß hier nur $\frac{7}{12}$ der berechneten Waſſermenge bey der Reduction nehmen, und alsdenn beträgt der Fehler nur $\frac{1}{9}$ oder $\frac{1}{15}$. So künſtlich vergleicht man ſonſt keine Erfahrungen mit der Theorie, und H. Hennert legt ſeiner Theorie doch wohl zuviel Lob bey. Die Differenzen der beobachteten, von ſeiner ſogenannten reducirten Waſſermenge ſind ja keine Differenzen von der nach ſeiner Theorie berechneten Menge: alſo ſind die von ihm angegebenen Abweichungen nicht Abweichungen von der Theorie, ſondern Abweichungen von ſeinen aus Beobachtungen geſchloſſenen Regeln.

33. §.

33. §.

Wenn es nun mit den bisherigen Erinnerungen gegen des H. Hennerts Vortrag seine Richtigkeit hat, so werde ich auch berechtiget seyn, zu behaupten, daß H. Hennerts Regeln, die Wassermenge zu berechnen, welche die Wasserschraube in gegebener Zeit heben soll, für die Ausübung ganz unbrauchbar sind. Es fehlet sehr viel, daß H. Hennert das Haupt-Problem von der Wasserschraube sollte aufgelöst haben, dessen Auflösung H. Euler unvollständig lassen mußte. Wollte man auf dem richtigen Wege, den H. Euler betreten hat, weiter gehen; so müßte man bey der Differentialgleichung des 24. §. die Methode durch Reihen zu integriren anwenden: man würde auf solche Art eine Reihe finden, welche z durch Φ ausdrückte. Ich denke, man hat nicht nöthig, die Mühe dieser Rechnung zu übernehmen; man kann sich ohnehin überzeugen, daß das Wasser bey der geneigten Lage der Schnecke so wenig, als bey ihrem senkrechten Stande (§.) durch die obere Mündung **ununterbrochen** durchfließen könne. Wenn in jedem Schraubengange nur die wasserhaltenden Bogen voll Wasser sind, so läßt sich begreifen, daß das Wasser beym Umlauf der Spindel höher steigen könne. Wenn aber die ganze Röhre von unten bis oben voll Wasser ist; so ist offenbar, daß alles unten auslaufen würde, wenn die Schraube nicht umliefe, und man die untere Mündung öfnete. Beym Umlauf der Spindel entstehen keine Kräfte, die das Wasser nach der Richtung der Röhre gegen die obere Mündung zu treiben können, es wäre denn, daß aus dem Anstoß der untern Mündung gegen die im Wege liegenden Wassertheilchen ein so starker Druck entstünde, der dies ausrichten könnte. Im 26. §. sind aber die Ursachen schon angegeben, weswegen dieser Druck beym Fortgang der Bewegung schwächer werden müßte, wenn er gleich beym Anfang der Umlaufsbewegung noch beträchtlich genug wäre. Man begreift auch leicht, daß die Umlaufs-

laufsbewegung ſchon ziemlich ſchnell ſeyn müßte, wenn der Druck gegen die untere Mündung ſtark genug werden ſollte, das Waſſer hinauf zu treiben.

34. §.

Geſetzt aber, daß das Waſſer bey hinlänglicher Schnelligkeit der Umlaufsbewegung, wenigſtens auf eine Zeitlang zum ununterbrochenen durchfließen gebracht werden könnte; geſetzt die Integration der Differentialgleichung, welche die Geſchwindigkeit des Waſſers zu finden diente, hätte keine große Schwierigkeit, und führte auch nicht auf ſehr verwickelte Formuln: ſo dünkt mich doch, daß hiebey noch wichtige Mängel übrig bleiben würden, die keine ſonderliche Uebereinſtimmung der Reſultate der Theorie mit dem wirklichen Erfolg würden erwarten laſſen. Die Differentialgleichung gründet ſich auf die Vorausſetzung, daß alle Waſſertheilchen, die in einerley auf der centriſchen Linie ſenkrechten Querſchnitt liegen, von einerley Kräften beſchleuniget werden, und daß die Schwungkräfte insgeſammt von der Röhre aufgehalten werden, ohne auf die Bewegung des Waſſers Einfluß zu haben. Eigentlich aber würde dies alles, ſo wie überhaupt diejenigen Grundſätze von der Bewegung des Waſſers in Röhren, worauf die Rechnung gebauet iſt, nur in völliger Schärfe gelten, wenn die Querſchnitte der Röhre unendlich klein wären. Alſo würde eine völlige Entwickelung der aus dieſen Grundſätzen geſchloſſenen Gleichungen alsdenn nur für die Ausübung einen erheblichen Nutzen verſprechen, wenn die um die Spindel gewundene Röhre eine ſehr geringe Weite hätte. Wenn man aber weis, daß es eine gewöhnliche Maxime ſey, dieſen Röhren eine beträchtliche Weite zu geben, damit deſto mehr Waſſer zur Zeit durchfließen könne, ſo wird man alle Hofnung aufgeben, daß die auf ſehr enge Röhren eingeſchränkte Theorie hier mit erheblichem Nutzen angewandt werden könne.

Wenn

Wenn die Wasserschraube inwendig nach Art einer Wendeltreppe eingerichtet ist, so etwa, wie man beym Leupold Zeichnungen davon antrift; so weicht ihre ganze inwendige Gestalt von derjenigen, welche die obige Rechnung voraussetzt, so sehr ab, daß ich gar keine Uebereinstimmung der auf sehr enge Röhren eingeschränkten Theorie erwarten würde, wenn auch alle Schwierigkeiten der Rechnung überwunden wären.

35. §.

Eben diese gewöhnliche Gestalt der Wasserschrauben, die von derjenigen, welche die obige Rechnung voraussetzt, so sehr abweicht, macht es mir begreiflich, woher er kömmt, daß eine solche Wasserschraube das Wasser zum Steigen bringen kann, wenn gleich die untere Mündung beym Umlauf beständig unter dem Wasser bleibt. Wenn eine enge Röhre schraubenförmig um die Spindel gewunden wäre, so würde nimmermehr das Wasser darinn in die Höhe steigen, weil Luft und Wasser in der engen Röhre einander nicht würden ausweichen können. Dies geschieht in weiten Röhren. Wenn das Wasser in der Röhre schon soweit gestiegen ist, daß es sich beym fernern Umlauf der Spindel über dem Wasserpaß desjenigen, woraus die Schraube schöpft, schon heben muß; so läuft es zwar weiter gegen die obere Mündung zu, aber nicht so, daß es bis an seine äußere Gränze den ganzen innern Raum der Röhre ausfüllt. Die vorderste Fläche desselben ist nicht auf der centrischen Röhre senkrecht, sondern horizontal, oder doch wenigstens beynahe horizontal. Es fließt so vorwärts, wie es in einer Rinne vorwärts fließen würde, und macht über sich der Luft Platz in die Röhre hineinzudringen. Auf solche Art sondert sich von dem beym ersten Umlauf hineingetretenen Wasser beym zweyten Umlauf soviel ab, als ohngefehr den wasserhaltenden Bogen im zweyten Schraubengang füllet. Eine solche Absönderung

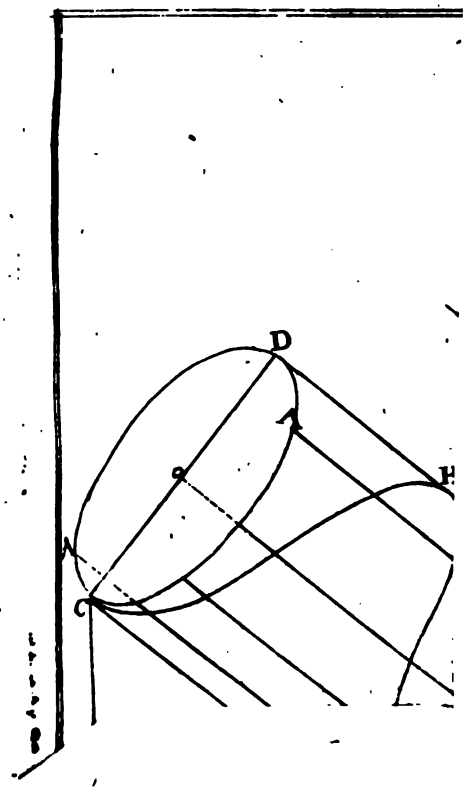
erfolgt bey jedem Umlauf, bis endlich das Waſſer zur obern Mündung ausläuft. Demnach iſt nie die ganze Schnecke voll Waſſer, ſondern von jedem Schraubengange nur ſoviel, als ohngefehr den waſſerhaltenden Bogen ausmacht, und die Zwiſchenräume ſind mit Luft angefüllt.

36. §.

Wenn ich nun dies alles erwäge, ſo dünkt mich, daß man immer mit der im Anfang dieſes Aufſatzes vorgetragenen auf die Geſetze des Gleichgewichts gebaueten Pitotſchen und bernoulliſchen Theorie von der Waſſerſchraube in der Ausübung zufrieden ſeyn könne. Wenn die Waſſerſchraube nur langſam umläuft, (und eine ſolche Einrichtung kann man der Maſchine nach Vorſchrift des 16. §. allemal geben) ſo denke ich, daß der Erfolg von dem Reſultat, was die erwehnte Theorie giebt, ſo ſehr nicht abweichen werde. Hierüber wären nun allerdings noch Verſuche zu wünſchen. Wenn ich Gelegenheit hätte, ſie anzuſtellen, ſo würde ich es auf beyde Arten verſuchen, ſowohl bey einer gänzlichen Tiefe der Grundfläche unter Waſſer, wobey die untere Mündung beſtändig unter Waſſer bleibt, als auch bey einer ſolchen Tiefe der Grundfläche unter Waſſer, welche des H. Bernoulli Regel gemäß iſt. Ich würde hauptſächlich auf den Umſtand aufmerkſam ſeyn, ob nicht bey ſonſt unveränderter Anordnung der Schraube, und einerley Umlaufsgeſchwindigkeit, eine größere Waſſermenge bey Beobachtung der bernoulliſchen Regel gehoben würde. Es ſcheint ſehr natürlich zu ſeyn, daß nicht ſo viel Waſſer bey jedem Umlauf in einerley Zeit aus einem Schraubengange in den andern hinüber treten kann, wenn Luft und Waſſer einander ausweichen müſſen, als in dem Fall, wenn die Luft durch die untere Mündung eintreten kann. Die Erfahrungen, welche ich aus des Herrn Hennerts Preisſchrift oben im 31 und 32 §. ſchon angeführet

führet habe, sind, wie es scheint, bey einer gänzlichen Tiefe der Grundfläche unter dem Wasser angestellt. Ich würde indessen zur Probe einige dieser Erfahrungen mit des H. Bernoulli Theorie vergleichen, wenn mir nicht verschiedene Zweifel entgegen stünden, ob auch wohl die im 31 §. angegebenen Zahlen für die Abmessungen der Schrauben alle richtig sind. Es kann vielleicht ein unrichtiger Abdruck meine Zweifel veranlassen: es können auch andre Ursachen hie und da ein Versehen bey der Angabe dieser Abmessungen zuwege gebracht haben. Einmal scheinen die Zahlen 35, 37, 36 Zoll, wofern sie wirklich die Halbmesser des Umfangs der Schraube bedeuten sollen, sehr groß zu seyn. Die Durchmesser hätten also auf 6 Fuß betragen, da doch Leupold im Theatro Machin. Hydraul. I Th. 72 §. 40 S. berichtet, daß man den größten Wasserschrauben in Holland nur 3 bis $3\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmesser gebe. Das statische Moment des Widerstandes wird bey einem so grossen Durchmesser ungemein groß, zumal da die hennertischen Schrauben drey Schraubengänge von sehr beträchtlicher Weite gehabt haben. Ueberdem stimmen die erwähnten Zahlen auch nicht mit denjenigen überein, die Herr Hennert für die Winkel η, und die Entfernungen der Schraubengänge voneinander angiebt. Jene Winkel sollen 11° 55′, 14° 42′, und 11° 54′, diese Entfernungen aber 23, 29, 24 Zoll betragen haben. Wenn aber a den Halbmesser, und e die Weite der Schraubengänge voneinander bedeutet, so wird $tang\ \eta = \frac{e}{2\pi a}$, also wäre für die erste Schraube $tang\ \eta = \frac{23}{220} = 0,1045$, und $\eta =$ 5° 58′. Nehme ich dagegen $2a = 35$ Zoll an, so wird $tang\ \eta = 0,2091$, und $\eta = 11° 49′$, welches doch mit Herrn Hennerts Zahl beynahe übereinkömmt. Ich würde also dafür halten, daß nur aus einem Versehen rayons statt diametres geschrieben wäre:

allein alsdenn ſtimmen in der Tafel des 32 §. die ich dort aus der hennertiſchen Schrift mitgetheilet habe, die Winkelgeſchwindigkeiten, und die Werthe von $2\sqrt{gk}$, oder α, welche H. Hennert für gleichgültig annimmt, nicht überein: alſo ſcheint es, daß man durch die Zahlen 23, 29, 24 Zoll nicht die ganze, ſondern die halbe Entfernung der Schraubengänge voneinander verſtehen müſſe. Dies letztere ſcheint auch mit der Weite der Schraubengänge mehr überein zu kommen, deren drey um jede Schraube befindlich geweſen ſind, und deren viereckte Oefnungen 1, 36; 1, 45; und 1, 41 Quadrat-Fuß weit angegeben werden. Für ſo weite Gänge wäre kein Platz geweſen, wenn die ganze Höhe eines Schraubenganges ohngefehr 2 Fuß bis $2\frac{1}{2}$ Fuß betragen hätte: oder man müßte die angegebenen Zahlen für die Summe aller dreyer Oefnungen an jeder Schraube verſtehen. Wofern wirklich die Halbmeſſer der Schrauben 35, 37, 36 Zoll betragen haben, ſo muß ich vorausſetzen, daß H. Hennert von der Axe der Spindel bis an die Mitte der Oefnungen der viereckten Gänge gemeſſen habe, wenn die Zahlen zur Rechnung brauchbar ſeyn ſollen. Wäre dieſes geſchehen, ſo hätten die Schrauben bis an ihre äußere Gränze gemeſſen, mehr denn 7 Fuß im Durchmeſſer betragen, und dies iſt doch wirklich eine ſehr ungewöhnliche Weite. Bey dieſer Ungewißheit ſcheint mir eine nähere Vergleichung der angegebenen Effecte mit der bernoulliſchen Theorie ohne Nutzen zu ſeyn. Der eigentliche Bau der bey dieſen Erfahrungen gebrauchten Waſſerſchrauben müßte auch noch genauer beſchrieben ſeyn, wenn man die Rechnung mit einiger Zuverläßigkeit darauf anwenden wollte. Vorjetzt ſchließe ich dieſe Abhandlung mit dem Vorſatz, die Unterſuchung künftig wieder vorzunehmen, wenn ich andre meinem Wunſch gemäſſere Erfahrungen werde geſammelt haben.


D
H
N
C

alle
der
dig
ner
ma
di
mů
gä
bef
46
we
ne
od
dr
lic
be
E
g
se
ih
b
X
a
z
b
s
a
ç

andre meinem Wunsch gemässere Erfahrungen
werde gesammelt haben.

Ab-

Abhandlung

die Verbeſſerung

des

Spießglas-Schwefels

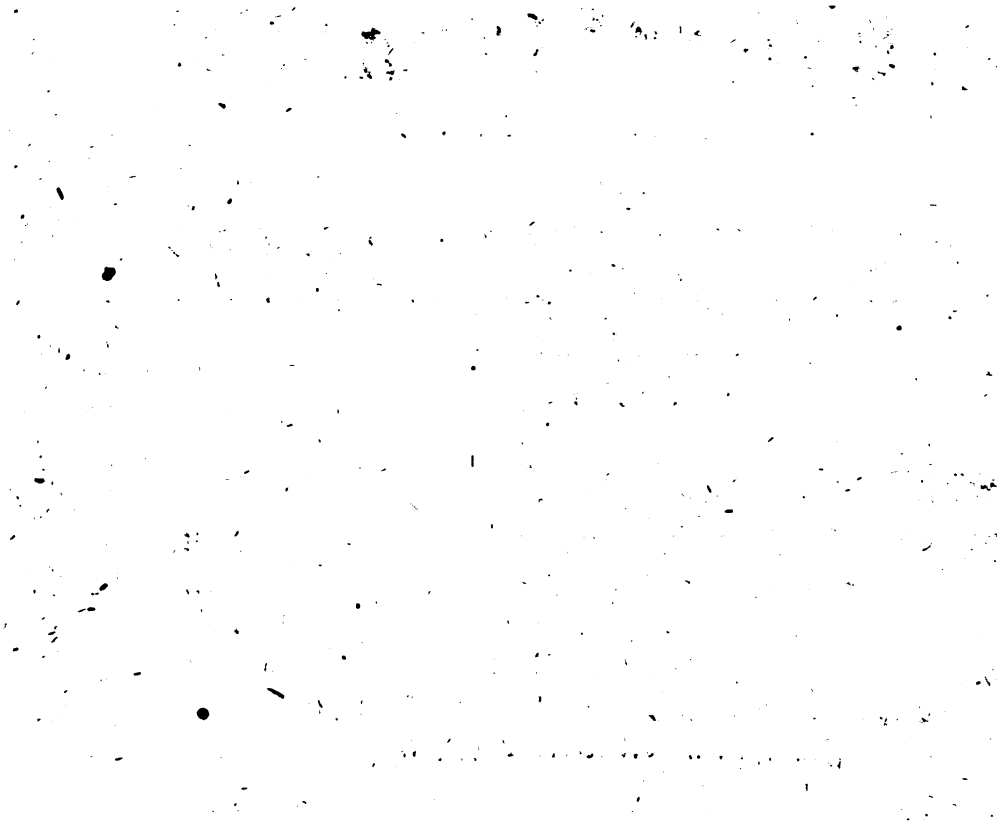
betreffend,

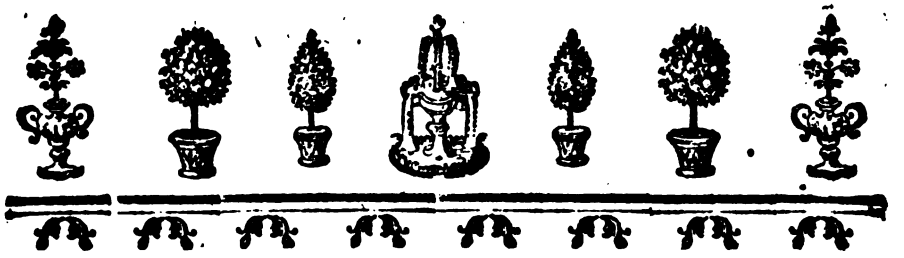
entworfen

von

Wilhelm Heinrich Sebaſtian Buchholz,

der Arzneywiſſenſchaft Doctor, ordentlichem Arzte zu Weimar, Mitglied der kaiſerlichen Akademie der Naturforſcher, ingleichen der churfürſtlichen baieriſchen Akademie der Wiſſenſchaften, wie auch der königlich preußiſchen Geſellſchaft zum Nutzen der Wiſſenſchaften zu Frankfurt an der Oder Beyſitzer.





Daß reines und rohes Spießglas aus vielem Schwefel, und einer beträchtlich größern Quantität reguliniſcher metalliſcher Theile beſtehe, und daß, ſo überflüßig nun auch die ſchwefelichten Grundtheile in dem Spießglaſe ſind, die reguliniſchen jene doch ſehr übertreffen, wird hoffentlich jedem Scheidekünſtler zur Genüge bekannt ſeyn.

Da nun bekannt iſt, daß der Spießglasſchwefel von den erſten Niederſchlägen mehreres Brechen verurſacht, als der von den letztern Niederſchlägen, folglich ſehr ſelten oder gar nicht von vernünftigen Aerzten verſchrieben wird, auch von den Apothekern entweder weggeworfen, oder als etwas unnützes hingeſtellt, oder auch unter die Spießglasleber gemiſcht wird; ſo habe ich mir vorgenommen, dieſen groben Schwefel entweder zu verbeſſern, oder eine Art anzuzeigen, den Spießglasſchwefel vom erſtern Niederſchlage gleich ſo gut zu erhalten, als wenn er vom 4ten oder 5ten Niederſchlage wäre.

Will man den groben Spießglasſchwefel dem von den letztern Niederſchlägen in ſeinem Weſen und Wirkung gleich machen, ſo iſt zu unterſuchen nothwendig, worinnen dieſe beyden Sorten von einander abgehen. Auf den Unterſchied der Farbe will

ich jetzo keinen Betracht nehmen, ſondern nur bey ihrer unterſchiedenen Wirkung ſtehen bleiben. Hier findet ſich nun, daß der erſtere die Eigenſchaft brechen zu erregen, am ſtärkſten, der mittlere dieſelbe in einem geringern, und der letzte, dieſe Eigenſchaft in einem noch geringern Grade beſitze, und dagegen mehr ſchweistreibend und reſolvirend ſey. Um welcher Beſchaffenheit willen auch eben dieſer letztere von den Aerzten verlangt wird.

Nun iſt es eine ausgemachte Wahrheit, daß alle brechmachende Eigenſchaft des Spießglaskönigs, blos in der Verbindung des phlogiſtons mit der antimonialiſchen Grunderde, und ſo lange dieſe Verbindung nicht zerſtöret wird, lediglich und allein beſtehe. Was hierbey pars arſenicalis ſey, den ſo viele und beſonders Neumann in ſeinen prælection. chemic. p. 11. pag. m. 287. der Keſſeliſchen Ausgabe Züllichau 1749. anklagen, habe ich noch niemals mit aller meiner angewandten Aufmerkſamkeit begreifen können, denn reines Spießglas iſt vom Arſenik darinn unterſchieden, daß es

1) nicht den geringſten Geruch von Knoblauch hat, welcher dem Arſenik, wenn er verbrannt wird, eigen iſt.

2) Läßt ſich der Spießglaskönig ganz und gar nicht im Waſſer, wie Arſenik, noch in oleo tartari per deliquium auflöſen, worinne doch der weiſſe Arſenik faſt ganz aufgelöſt wird.

3) Haben die Beſtandtheile des Arſeniks und Spießglaſes ganz unterſchiedene Figuren, denn die erſtern ſind piramidaliſch, und die letztern ſind den Nadeln gleich, und dieſes beſonders in den allerkleinſten Theilchen.

Ja

Ja sogar wenn man das Spießglas aus den verschiedenen Bereitungen des Spießglases wieder reducirt, so nimmt es die spitzige oder nadelförmige Gestalt wieder an.

Ferner ist unläugbar, daß das Spießglas in sehr verschiedenen, und besonders nach denjenigen Graden, wornach man ihm etwas von seinem Schwefel entziehet, und wodurch das übergebliebene immer mehr metallartig wird, in seiner brechenmachenden Wirkung gestärket werden kann. Daraus also sehr deulich sich ergiebt, daß diese Wirkung den reguliniſchen Theilen eigen ist.

Zu diesen vorgetragenen Grundsätzen gehört auch noch dieser, daß der wahre Schwefel im Spießglase an und vor sich betrachtet, von dem gemeinen Schwefel in keinem Stück unterschieden sey.

Wenn man nun also an dem Spießglasschwefel nach den verschiedenen Niederschlägen, verschiedene Wirkungen wahrnimmt, so fließt meiner Meinung nach daraus, daß ein Spießglasschwefel von dem ersten Niederschlage, von einem andern des letztern Niederschlags nur durch die Proportion des mit verbundenen wahren Schwefels mit den reguliniſchen Theilen unterschieden sey, von welchem Schwefel also nach der Wirkung, und nach obigen Sätzen der erste Niederschlag weniger als der letzte besitze; daher ist ja die Folge sonnenklar, daß wenn ich dem Spießglasschwefel vom erstern Niederschlage so viel Schwefel zusetze, daß zwiſchen diesem und den reguliniſchen Theilen eben die Verhältniß herauskömmt, wie bey dem Spießglasschwefel vom letztern Niederschlage, daß dieser eben die helle Farbe, und die weit gelin-

dere Wirkung bekommen müßte: und dieſer Satz beſtättigt ſich auch durch die Erfahrung. Denn da jener Theil wahrer Schwefel iſt, ſo beym letztern Niederſchlage ſtecket, und vor dem gemeinen nichts voraus hat, ſo kann es auch keinen Unterſchied machen, wenn ich dem erſtern, um ihn mit jenem in gleiche Proportion ſeiner Theile zu ſetzen, nur gemeinen Schwefel beyſetze. Daß der Schwefel ſowohl merkurialiſche als antimonialiſche Subſtanzen verbeſſert, beweiſet auch dasjenige, was die Verfaſſer des New Diſpenſatory London 1763. pag. 86. ſagen: Sulphur, which reſtrains the power of mercury and the antimonial Semimetal, remarkably abates the virulence of this poiſonous mineral alſo. Such of theſe ſubſtances as participate more largely of Sulphur, Seern to be almoſt innocent.

Ehe ich auf dieſe Grundſätze fiel, ſo glaubte ich durch den naſſen Weg eine Scheidung der groben reguliniſchen Theile von den ſchwefelichten vermittels der alcaliſch-cauſtiſchen Salze zu bewerkſtelligen. Ich nahm derowegen eine Unze groben Spießglasſchwefels d. i. vom erſten und zweyten Niederſchlage, kochte ſolchen in einem irrdenen Gefäße mit einem Maas oder zwey Pfund Kalchwaſſer, welches mit 2. Quintel vom geſtoſſenen Weinſteinöle geſchärft war, bis über die Hälfte ein. Der Schwefel ſchien faſt aufgelöſet, die Auflöſung war citronenfärbig. Nach dem Durchſeigen durch Fließpapier, ſchlug ich den Schwefel durch deſtillirten Eſſig nieder, und erhielt nicht mehr als anderthalb Quintel eines ſchönen verbeſſerten Schwefels.

Dieſer Verſuch war nicht der vortheilhafteſte, er führte mich aber auf den Gedanken, ob nicht ein ſtärker cauſtiſches Salz noch mehr vom Schwefel auflöſen würde.

Ich

Ich nahm daher ungelöschten Kalch und gute Pottasche zu gleichen Theilen, vermischte beydes, und ließ das Mengsel in starkem Feuer wohl fließen, schüttete es aus, und, nachdem es gepulvert, kalt Wasser darüber, woraus eine sehr gesättigte caustische Lauge entstund. Eine Unze vom groben Spießglasschwefel kochte ich ohngefehr 2. Stunden in dieser caustischen Lauge, die Auflösung verlohr ihre röthlichbraune Farbe, und wurde, nachdem es durchgeseigt, milchfarbe. Dem Ansehen nach war hierinnen wenig Schwefel enthalten; allein da es mit destillirtem Essig niedergeschlagen wurde, so zeigte sich eine schöne Pomeranzenfarbe, und ich erhielt 2. Quintel eines lockern Schwefels, welcher ungleich feiner ausfiel, als der im Filtro zurück gebliebene.

Ferner nahm ich eine Unze groben Spießglasschwefel, kochte solchen mit ziemlich gesättigter Seiffensiederlauge, wozu ich während dem Kochen öfters frische schüttete, um dadurch das caustische dieser Lauge zu concentriren. Ich verfuhr damit wie im vorigen Versuche, und erhielt einen Schwefel, der die erstern alle an Feinheit und heller Pomeranzenfarbe übertraf. Nur war dieser schöne Schwefel zu kostbar, denn ich erhielt nicht mehr durch den Niederschlag als Fiv.

Da nun bey diesen jetzt erzählten Versuchen die Quantität des erhaltenen feinen Schwefels zu gering war, so nahm ich nach obigen erzählten Grundsätzen verschiedene Versuche vor, welche meiner Muthmassung, wie der Erfolg gewiesen, nicht widersprachen.

Eine Unze groben Spießglasschwefel, und ein Loth gemeinen Schwefel vermischte ich miteinander, setzte einen Schmelztiegel in das Feuer, und ließ darinn zwey Unzen Pottasche fliessen, trug das Gemische vom Schwefel löffelweise dazu, welches im Schmelzen stark nach Schwefel roch. Nachdem alles einge-

[illegible] die Miſchung eine Viertelſtunde gefloſſen, goß ich [illegible] damit, wie bey der Bereitung eines jeden an[illegible]ſpiesglasſchwefels. Im Filtro blieb ein dunkles ſchwarz[illegible] Regulus zurück. Die Lauge wurde mit deſtillirtem Eſſig [illegible]geſchlagen, da denn ein lockerer Schwefel zu Boden fiel. Mit auch mit dieſer erhaltenen Quantität Schwefel war ich nicht [illegible]frieden.

Der Verſuch wurde wiederhollt, weil ich glaubte, daß, da [illegible] das Gemiſche zu lange nämlich ¼ Stuude lang im Feuer gehal[illegible]ten, zu viel vom Schwefel verbrannt ſeyn würde. Nachdem die Maße alle eingetragen, und einige Minuten zuſammen im Fluſſe geſtanden, nahm ich ſolche mit einem Spatel aus dem Schmelztiegel, pulveriſirte es, und verfuhr wie bey nur gedachtem Proceß. Ich erhielt dadurch zwar eine etwas beträchtlichere Menge lockern Schwefel, aber an hellgelber Farbe, Leichtigkeit und dergleichen kam er dem erſtern bey weitem nicht gleich.

Die Urſache, warum in nur gedachtem Verſuche der Schwefel nicht recht gerathen war, lag meiner Meinung nach darinn, daß die Wirkung der Pottaſche auf den gemeinen zugeſetzten Schwefel nicht hinlänglich geweſen, folglich nur etwas vom groben Spießglasſchwefel angegriffen und aufgelöſet habe. Derowegen nahm ich von allen 3. Cörpern, wie ich im erſten Verſuche von dieſer Art beſchrieben, eben das Gericht, trug es in einen Schmelztiegel, und ließ es etwas länger fließen. Unglücklicher Weiſe aber durchbohrte die Maße den Tiegel, und war eine beträchtliche Menge durchgedrungen, ehe ich es gewahr wurde.

Da mir aus der Erfahrung bekannt war, daß die Beſtandtheile einer ordentlichen Schwefelleber, nämlich reine Pottaſche und Schwefel, in einen glühenden Tiegel getragen, ſehr geſchwind flieſſen, ohne daß vieles vom Phlogiſto des Schwefels verbrennt; ſo

nahm

nahm ich derohalben 4 Unzen vom groben Spießglasschwefel, 2 Unzen vom gemeinen Schwefel, und ½ tt. Pottasche, mischte alles gepulvert unter einander, und trug es in einen glühenden Schmelztiegel unter beständigen Umrühren. Nachdem es alles hineingetragen wär, und recht roth glühete, so goß ich es aus. Nach dem Erkalten hatte ich eine rothbraune Maße, welche gepulvert ich in 5 Maas Wasser gelinde in einem eisernen Topfe so lange kochte, bis ein Maas verkocht war, dann durch ein Filtrum seigte. Die durchgeseigte Flüßigkeit war wie Molken anzusehen. Nach dem Erkalten tröpfelte ich destillirten Essig dazu, und wurde mit Vergnügen gewahr, daß eine unglaubliche Menge des schönsten blaß pomeranzenfarbigten Schwefels niederfiel. Wieviel ich eigentlich in diesem Versuche feinen Schwefel erhalten, kann ich nicht bestimmen, weil etwas vom Filtro verschüttet worden.

Mit diesem Versuche nun war ich vollkommen zufrieden, da derselbe mit meiner Theorie und Wünschen vollkommen übereinkam. Nunmehr können diejenigen Apotheker, welche eine große Menge vom groben Spießglasschwefel vorräthig haben, getrost ihren Schwefel auf nur beschriebene Art verbessern.

Nun kam es darauf an, wie die zeitherige in den Apotheken übliche Methode, den Spießglasschwefel aus rohem Spießglas, Weinstein und Salpeter durch das Verpuffen zu verfertigen, verbessert werden könnte, welche als unvollkommen mit Recht genennet werden kann, weil dadurch eine Menge grober Schwefel erhalten wird, welchen niemand gebrauchen kann.

Vier Unzen Pottasche ließ ich im Feuer fließen, und trug sodann 2 Unzen rohes gepulvertes Spießglas dazu, welches mit einer Unze Schwefel vermischt war, da alles hinlänglich floß, wurde es ausgegossen, mit Wasser gekocht, durchgeseigt, welches durch-

geseigte

geſeigte ein ſehr dunkelbraunes Anſehen hatte. Das Ueberbleibſel im Filtro war ſehr wenig, woraus ich ſchon im voraus muthmaſſete, es würde bey dieſer Operation vieler grober Schwefel niederfallen. Zu der durchgeſeigten Flüßigkeit tröpfelte ich die gehörige Quantität deſtillirten Weineſſig, und wie ich vermuthet hatte, fiel der Schwefel ſehr dunkelbraun nieder. Auch die Menge war der Quantität des Spießglaſes nicht gemäß, weshalben ich alles zuſammen wegſchüttete.

Der Verſuch wurde alſo wie bey dem letzten mit dem Spießglasſchwefel angeſtellten mit dem rohen Spießglaſe wiederholt.

Ich nahm 1 tt. rohes Spießglas ½ tt. gemeinen Schwefel und 2 tt. reine Pottaſche, miſchete dieſe Dinge gepulvert unter einander, und ließ es in einen Tiegel fließen. Goß es denn aus, und kochte es mit Waſſer gehöriger maſſen, dann wurde es nach dem Durchſeigen mit deſtillirtem Weineſſig niedergeſchlagen. Hier bekam ich nun vom groben braunen Schwefel nicht das mindeſte zu ſehen, ſondern es ſchlug ſich das erſte wie das letzte mit einer hellgelben Pomeranzenfarbe nieder, und zwar zu meinem größten Vergnügen.

Dieſer letztere Schwefel war demjenigen von der 4ten Niederſchlagung auf dem gewöhnlichen Weg bereitet, in ſeinen Wirkungen auf den menſchlichen Körper vollkommen gleich.

Abhandlung
über die
Theorie
der
Saugwerke.

von
Wencesl. Joh. Gustav Karsten.
1768.

Theorie der Saugwerke.

1. §.

Es ſind zweyerley Umſtände in Betrachtung zu ziehen, wenn ein Saugwerk ſo vortheilhaft eingerichtet werden ſoll, als es in ſeiner Art ſeyn kann. Einmal wird erfordert, daß das Waſſer in der Saugröhre nicht etwa in einer gewiſſen Höhe, der fernern Bewegung des Kolbens ungeachtet, hängen bleibe, ſondern wirklich nach einigen Kolbenzügen bis in den Stiefel, und endlich bis zur größten Höhe des Kolbens hinauf ſteige. Fürs zweyte muß das Saugwerk hiernächſt ohne Zeitverluſt bey jedem Kolbenhub ſoviel Waſſer geben, als der ganze Raum des Kolbenzuges im Stiefel faſſen kann. Um dieſe beyden Stücke mit der gehörigen Deutlichkeit zu unterſcheiden, muß man ſich vorſtellen, daß anfangs noch die ganze Saugröhre ledig ſey, und das Waſſer in derſelben nur ſo hoch ſtehe, als in demjenigen Behälter, aus welchem es das Saugwerk herauf ziehen ſoll. Beym erſten Kolbenzuge wird nun das Waſſer in der Saugröhre auf

eine gewiſſe Höhe ſteigen: beym zweyten Kolbenzuge etwas höher: beym dritten Kolbenzuge wiederum etwas höher, und ſo ferner. Wenn ſich die Einrichtung ſo machen ließe, daß der Kolben in ſeinem niedrigſten Stande an den Boden des Stifels, und das daſelbſt befindliche Ventil genau anſchlöſſe; ſo würde das Waſſer allemal bis in den Stiefel treten, und bis zur höchſten Stelle des Kolbens gehoben werden, dafern anders die gröſte Kolbenhöhe über die Oberfläche des Waſſers, welches das Saugwerk heraufziehen ſoll, nicht über 32. rheiniſche Fuß beträgt. In allen andern Fällen, wo zwiſchen dem Kolben in ſeinem niedrigſten Stande, und dem Boden des Stiefels ein Zwiſchenraum bleibt, wird die in demſelben zurück bleibende Luft dem in der Saugröhre hinauf ſteigenden Waſſer deſto mehr hinderlich ſeyn, je gröſſer dieſer Zwiſchenraum iſt. Er heißt deswegen der ſchädliche Raum, und das Saugwerk iſt deſto vollkommener, je kleiner dieſer ſchädliche Raum iſt. Wenn man das Pumpenventil nicht im Boden des Stiefels, ſondern irgendwo in der Saugröhre anbringen wollte, ſo würde man hiedurch den ſchädlichen Raum vergröſſern, und dies deſtomehr, je niedriger das Ventil in der Saugröhre angebracht würde. Die allerunvollkommenſte Pumpe würde alſo diejenige ſeyn, welche ihr Ventil nicht am oberſten, ſondern am unterſten Ende der Saugröhre hätte. Man kann demnach alle Arten von Saugwerken in folgende drey Claſſen bringen. Eine Pumpe der vollkommenſten Art hat ihr Ventil oben an der Saugröhre, und gar keinen ſchädlichen Raum. Eine Pumpe der unvollkommenſten Art hat ihr Ventil unten an der Saugröhre. Eine Pumpe von mittlerer Art hat zwar ihr Ventil oben an der Saugröhre, aber zwiſchen dem Kolben und dem unten im Stiefel befindlichen Ventil einen ſchädlichen Raum. Belidor hat in der Architect. Hydraul. III. Buch III. Cap. 913. §. ebenfalls dieſe drey Arten der Saugwerke von einander unterſchieden.

2. §.

2. §.

Diese Betrachtungen betreffen inzwischen nur noch die nöthige Vollkommenheit des Saugwerks in Ansehung des ersten vorhin erwähnten Umstandes, nämlich in Ansehung der anfänglichen Bewegung des Wassers in der Saugröhre, bevor es den Kolben im Stiefel erreicht. Sobald es bis an denselben gelangt ist, wird es ihm hiernächst beständig folgen, und die Atmosphäre kann es bis zur größten Kolbenhöhe hinauf treiben, wenn diese nicht über 32 rheinische Fuß beträgt. Geschieht dies wirklich bey jedem Kolbenzuge, so wird die Pumpe bey jedem Hub soviel Wasser geben, als den körperlichen Raum des Kolbenzuges ausfüllen kann. Allein man siehet wohl, daß eine gewisse Zeit nöthig sey, bevor das Wasser vom niedrigsten bis zum höchsten Kolbenstande hinauf steigen kann. Wofern der Kolben von seiner niedrigsten Stelle bis zur höchsten in jedem Augenblick mit eben derselben Geschwindigkeit stiege, womit das Wasser im Stiefel hinauf steigt; so würde das Wasser demselben beständig unmittelbar nachfolgen, ohne daß zwischen beyden ein leerer Zwischenraum bliebe. Falls aber der Kolben schneller stiege, als das Wasser folgen kann, so würde zwischen beyden ein leerer Raum bleiben, und in dem Augenblick, da der Kolben in seiner höchsten Stelle schon wieder umkehret, würde der Raum des Kolbenzuges noch nicht mit Wasser angefüllet seyn: also würde auch nicht auf jeden Kolbenzug soviel Wasser gehoben werden, als die Vollkommenheit des Saugwerks erfordert. Stiege der Kolben nicht so geschwinde, als das Wasser für sich steigen kann; so würde zwar jeder Kolbenhub soviel Wasser geben, als der Raum des Kolbenzuges fassen kann: allein es würde mehr Zeit darüber hingehen, als nöthig wäre, wenn der Pumpenkolben mit dem Wasser gleich schnell stiege. Nun ist leicht abzusehen, daß das Wasser nicht beständig mit gleicher

durch jeden dieser Buchstaben die Höhe einer Waſſerſäule verſtanden wird, der die Federkraft der Luft das Gleichgewicht hält: ſo hat man $k' = \frac{nbk}{mc+n(b-x)}$, und $k = k'+x$, alſo $x = k - \frac{nbk}{mc+n(b-x)}$. Hieraus folgt $nx - (mc+nb+nk)x = -mck$, und $X = \frac{1}{2}(\frac{m}{n}c+b+k) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(\frac{mc}{n}+b+k)^2 - \frac{mck}{n})}$.

Dafern Stiefel und Saugröhre gleich weit ſind, alſo $m = n$ iſt, ſo hat man $x = \frac{1}{2}(a+k) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(a+k)^2 - ck)}$, weil $b+c = a$ iſt. Man kann dieſe Gleichung als eine allgemeine Formul betrachten, die ſich auf alle Fälle, auch wenn Stiefel und Saugröhre ungleich weit ſind, anwenden läßt, wenn man durch C nicht die wirkliche Höhe des Kolbenzuges verſteht, ſondern die ſogenannte auf die Mündung der Saugröhre reducirte Höhe deſſelben. Wenn nämlich ſtatt des Stiefels, deſſen Querſchnitt $= m$ iſt, ein andrer gebraucht würde, der eben ſo weit als die Saugröhre wäre, ſo müßte der Kolben um die Höhe $\frac{mc}{n}$ gehoben werden, wenn bey jedem Zuge eben ſoviel Luft aus der Saugröhre in den Stiefel treten ſollte, als in dem vorigen Fall. Man iſt gewohnt, ſtatt des gegebenen Saugwerks das reducirte zu betrachten, und man nimmt alsdenn an, wenn beyde Saugröhren gleich hoch ſind, daß das Waſſer in dem reducirten Saugwerk eben ſo ſteige, wie in dem natürlichen, und wendet deßwegen die Rechnungen bloß auf das reducirte Saugwerk an. Dieſe Vorausſetzung hat, wie man leicht ſiehet, ihre Richtigkeit, ſo lange das Waſſer die Höhe der Saugröhre noch nicht überſtiegen hat. Sobald dies letztere erfolgt iſt, leidet ſie ihre Einſchränkungen, wie die folgenden Unterſuchungen ergeben werden.

4. §.

4. §.

Dafern während des zweyten Kolbenzuges das Wasser von Z bis W steigt, so läßt sich auf eben die Art XW = Y finden. Was vorhin $b - x$ war, sey jetzt $= \beta$, und die Federkraft der innern Luft nach dem zweyten Zuge $= h''$; so ist $mc + n(\beta - y) : n\beta = h' : h''$, und $h'' = h' - y$, folglich wird $y = \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{n} + \beta + h'\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{mc}{n} + \beta + h'^2\right) - \frac{mch'}{n}\right)}$. Man wird leicht abnehmen, daß bey der wirklichen Berechnung der Werthe von X und Y vor der Wurzelgröße das Zeichen (—) genommen werden müsse, weil das Wasser stehen bleiben wird, wenn es die niedrigste von den beyden Höhen erreicht hat, die der Gleichung ein Genüge thun. Setzt man $ZW = x + y = z$, so wird $\beta - y = b - x$, und $h'' = h - x$, also $mc + n(b - x) : n\beta = h' : h - x$, woraus $(mc + n(b - x))(h - x) = n\beta h'$ folgt, also $x = \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{n} + b + h\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{mc}{n} + b + h^2\right) - \frac{mch}{n} - (bh - \beta h')\right)}$ oder $x = \frac{1}{2}(a + h) - \sqrt{\left(\frac{1}{4}(a + h^2) - ch - (bh - \beta h')\right)}$, wenn $m = n$ ist.

Es sey $a = 16$ Fuß und $b = 12$ Fuß, also $c = 4$ Fuß, und $h = 32$ Fuß, $m = n$; so wird $x = 2,834$, und $z = 5,798$. Muschenbroeck hat dies Exempel in der Introd. ad Phil. Nat. T. II. §. 2124. und er bringt für den ersten Kolbenzug eben die Höhe x heraus: allein die folgenden Kolbenzüge findet er nicht so, wie sie nach gegenwärtiger Rechnung heraus kommen. Die für x gefundene Gleichung läßt sich, wenn $m = n$ ist, so ausdrücken: $\frac{b}{a - x} + \frac{x}{h} = 1$, und eben den Ausdruck hat Muschenbroeck. Hieraus schließt er, man finde die Gleichung für x, wenn in jener

... und β ſtatt b geſetzt werde. Dies giebt $\frac{\beta}{a-x}+\frac{c}{k}$ ...

... hiebey hat Muſchenbroeck ohne Zweifel eine Pum... unvollkommenſten Art in Gedanken gehabt, ob es gleich ... daß er die Pumpe der vollkommenſten Art verſtehe, auch ... Berechnung grade dieſe letztere, oder doch wenigſtens die mit ... Art vorſtellig macht. Es wäre dies ſonſt keinesweges eine ... Anwendung der für x gefundenen Gleichung. Wenn man dieſe Gleichung ſo ausdrückt, $\frac{bk}{a-x}=k-x$: ſo ſiehet man deutlicher, wie ſie verändert werden muß, wenn z ſtatt x geſetzt wird. Es iſt nämlich $\frac{bk}{a-x}$ die Federkraft der in dem Raum $a-x$ ausgebreiteten Luft, deren Federkraft, da ſie noch den Raum b füllte, $=k$ war; überdem iſt $k-x$ der Druck, womit die äußere Atmoſphäre die Waſſerſäule x aufwärts preßt, und beyde müſſen gleich ſeyn. Nun aber iſt beym Anfang des zweyten Kolbenzugs die in dem Raum β eingeſchloſſene Luft nicht $=k$, ſondern $=k'$, und der Druck, womit die Atmoſphäre die Waſſerſäule z aufwärts preßt, iſt $=k-z$. Daher wird $\frac{\beta k'}{a-z}=k-z$, welches die vorhin für z gefundene Gleichung iſt, wenn man $m=s$ ſetzt. Uebrigens iſt die Gleichung $Y=\frac{1}{2}\left(\frac{mc}{n}+\beta+k'\right)-\sqrt{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{mc}{n}+\beta+k'^2\right)-\frac{mck'}{n}\right)}$ am bequemſten, wenn man berechnen will, um wieviel das Waſſer bey jedem folgenden Kolbenzug ſteige. Wenn nämlich jedesmal durch β die Höhe des in der Saugröhre noch mit Luft gefüllten Raums, und durch k' die Dichtigkeit dieſer Luft verſtanden wird, ſo iſt y dasjenige Stück, um welches beym

beym folgenden Kolbenzuge die Höhe des Waſſers in der Saugröhre zunimmt. Das vorige Exempel giebt folgende Reſultate.

Anzahl der Kolbenzüge.	Der Werth von y	Höhe des Waſſers in der Saugröhre.
1	2, 838	2, 834
2	2, 964	5, 798
3	3, 152	8, 950
4	3, 462	12, 412

Daraus ergiebt ſich, daß das Waſſer nach dem vierten Kolbenzuge ſchon in den Stiefel hinein trete. Alſo wird es der fünfte Kolbenzug ſchon bis an die höchſte Stelle heben können, die der Kolben erreicht: und wenn die Gußröhre nahe über dieſe Stelle angebracht iſt; ſo wird es beym ſechſten Kolbenzuge ſchon zur Gußröhre heraus laufen.

5. §.

Dieſe Rechnung ſetzte voraus, daß Stiefel und Saugröhre von gleicher Weite ſind. Allein die gebrauchte Gleichung findet, wie ſchon erinnert worden, nur ſo lange ihre Anwendung, als die Höhe des heraufſteigenden Waſſers die Höhe der Saugröhre nicht übertrift, wenn Stiefel und Saugröhre ungleich weit ſind. Dies ergiebt ſich ſogleich, wenn man auf die zum Grunde liegende Proportion $mc + n(b - x) : nb = h : h - x$ zurück gehet. Das erſte Glied drückt den Raum aus, den die Luft ausfüllt, in dem Augenblick, da der Kolben das erſtemal ſeine höchſte Stelle erreicht hat: aber in der Vorausſetzung, daß das Waſſer nur bis an X (1. Fig.) in der Saugröhre geſtiegen ſey. Wäre es, wie in der zweyten Figur bis an X in den Stiefel geſtiegen, ſo wäre der Raum, den die verdünnte Luft einnimmt, $= mc - m.BX$. Wenn demnach nun $BX = u$ geſetzt wird, ſo erhält man $m(c - u) : nb = h : h - b - u$, alſo wird $m(c - u)(h - b - u) = nbh$. Weil nun $b + u$ das iſt, was vorhin x

... man auch $(a-x)(h-x)=\frac{nbk}{m}$, und dies giebt

... $x=\frac{nbk}{m}-ah$, woraus nun $x=\frac{1}{2}(a+k)-$

... $+h^2)-(a-\frac{nb}{m})k)$ folgt. Wenn $m=n$ ist, ſo kömmt

... Berechnung mit der vorigen überein, wie erfordert wird. Man wendet dieſe Rechnung leicht auf den Fall an, wenn dies nicht der erſte Kolbenzug, ſondern einer der folgenden iſt, wobey das Waſſer in den Stiefel tritt. War die Höhe des Waſſers in der Saugröhre $=x$, die Höhe ihres noch ledigen Theils $b-x=\beta$, die Dichtigkeit oder Federkraft der darinn eingeſchloſſenen Luft $=h'$; ſo hat man $m(c-u):n\beta=h':h-b-u$, oder $(a-x)(h-x)=\frac{n\beta h'}{m}$, woraus $x=\frac{1}{2}(a+k)-\sqrt{(\frac{1}{4}}$ $(a+h^2)-ah-\frac{nb}{m}h')$ folgt.

6. §.

Die Abmeſſungen des Stiefels und der Saugröhre einer Pumpe der unvollkommenſten Art ſind gegeben, nebſt der Höhe des Kolbenzuges: man fragt, wie hoch das Waſſer nach dem erſten ſowohl, als den folgenden Kolbenzügen in die Saugröhre hinein treten werde.

Aufl. Beym erſten Kolbenzuge tritt das Waſſer auf einerley Höhe, es mag das Ventil oben oder unten an der Saugröhre angebracht ſeyn, und die Pumpe zur vollkommenſten oder unvollkommenſten Art gehören, dafern anders alle Abmeſſungen beyder Arten einerley ſind. Es iſt nämlich in beyden Fällen anfangs die ganze Saugröhre mit Luft von natürlicher Dichtigkeit

angefüllet, die also den Raum nb einnimmt. Steigt nun beym ersten Kolbenzuge das Wasser auf die Höhe (1. Fig.) $ZX = x$, so wird die Luft in den Raum $mc + n(b - x)$ ausgebreitet, so daß ihre Federkraft $= \frac{nb}{mc + n(b-x)} h$ wird, und diese muß $= h - x$ seyn, wie im 3 §. Beym zweyten und den folgenden Kolbenzügen aber sind beyde erwähnte Fälle gar sehr verschieden. Indem nämlich der Kolben wieder bis zur niedrigsten Stelle herab steigt, drückt er die Luft bis auf ihre natürliche Dichtigkeit zusammen, und soviel, als vorhin den Raum nx ausfüllte, tritt nur durch das Kolbenventil hinaus. Die übrige bleibt in dem Raum $BX = n(b - x) = n\beta$ eingeschlossen, und diese behält ihre natürliche Dichtigkeit, statt dessen, daß bey der Pumpe der vollkommensten Art die in diesem Raum zurück bleibende Luft nur die Federkraft $\frac{nb}{mc + n(b-x)} h = h'$ behält. Wenn nun beym zweyten Kolbenzuge das Wasser bis W steigt, und $ZW = x$ ist; so breitet sich die in dem Raum $n\beta$ vorhin zurück gebliebene natürliche Luft in den Raum $mc + n(b - x)$ aus, und ihre Federkraft wird $= \frac{n\beta h}{mc + n(b-x)}$, die nun $= h - x$ seyn muß, so daß man die Gleichung $\frac{n\beta h}{mc + n(b-x)} = h - x$ erhält. Bey der vollkommensten Art der Pumpe hätte man $\frac{n\beta h'}{mc + n(b-x)} = h - x$, wie im 4. §. Im gegenwärtigen Falle also wird $x = \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{n} + b + h\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\left(\frac{mc}{n} + b + h^2\right) - \left(\frac{mc}{n} + b - \beta\right) h\right)}$, und man darf in der für den ersten Kolbenzug gefundenen Gleichung nur x statt x und β statt b schreiben, wenn man $\frac{mc}{n} + b = a$ setzt.

Wenn man hiemit dasjenige verbindet, was im 4 §. in Absicht der Muschenbroeckischen Rechnung für die Höhen, worauf das Wasser bey wiederholten Kolbenzügen steigt, ist erinnert worden, so ergiebt sich augenscheinlich, daß die gedachten Erinnerungen ihre Richtigkeit haben, und Muschenbroecks Rechnung nur für die Pumpe der unvollkommensten Art gelte. Bey dieser Art Pumpen wird also das Wasser nicht ehe bis in den Stiefel steigen können, bevor alle Luft aus der Saugröhre heraus getreten ist. Falls die Luft nicht insgesammt heraus treten kann, so wird das Wasser nur bis zu einer bestimmten Höhe in der Saugröhre gelangen, und hiernächst unbeweglich stehen bleiben, es mag die Bewegung des Kolbens, so lange man will, fortgesetzet werden.

7. §.

Die Umstände zu finden, unter welchen das Wasser entweder wirklich bis in den Stiefel treten wird, oder nur bis zu einer bestimmten Höhe in der Saugröhre gebracht werden kann, wenn die Pumpe zur unvollkommensten Art gehört.

Aufl. Es sey (1. Fig.) $ZV = x$ die größte Höhe, auf welche das Wasser gebracht werden kann, so ist beym niedrigsten Stande des Kolbens die zurückgebliebene Luft in dem Raum $BV = n\,(b - x)$ eingeschlossen, und ihre Federkraft ist so groß, als die natürliche Federkraft der Atmosphäre. Beym höchsten Kolbenstande ist eben diese Menge Luft in den Raum $mc + n\,(b - x)$ ausgebreitet, also ist in diesem Zustande ihre Federkraft $= \frac{n(b-x)\,h}{mc + n\,(b-x)}$. Wenn nun diese $= h - x$ ist, so kann das Wasser nicht mehr steigen, und dies erfordert die Voraussetzung, vermöge welcher x die größte Höhe seyn soll, die das Wasser erreichen kann. Diese wird demnach durch die Gleichung

chung $\frac{n(b-x)k}{mc+n(b-x)} = k - x$ bestimmt, und diese Gleichung giebt $x^2 - (\frac{mc}{n} + b)x = -\frac{mck}{n}$, also $x = \frac{1}{2}(\frac{mc}{n}+b) - \sqrt{(\frac{1}{4}(\frac{mc}{n}+b)^2 - \frac{mck}{n})}$, da dann vor dem Wurzelzeichen das Zeichen (—) gebraucht werden muß, weil das Wasser in der kleinsten von den beyden Höhen stehen bleiben wird, die der Gleichung ein Genüge thun.

Es ist demnach diese größte Höhe allemal kleiner als $\frac{1}{2}(\frac{mc}{n}+b)$, also kleiner als die halbe Summe der Höhe der Saugröhre, und der auf die Mündung der Saugröhre reducirten Höhe des Kolbenzuges. Nur in dem Fall, wenn $\frac{1}{4}\frac{mc}{n}+b)^2 = \frac{mck}{n}$ ist, erreicht das Wasser völlig die Höhe $= \frac{1}{2}(\frac{mc}{n}+b)$, welches also die halbe größte Höhe des Kolbens in dem Fall ist, wenn Stiefel und Saugröhre gleich weit sind. Setzt man Kürze halber $\frac{mc}{n} + b = a$, und $\frac{nc}{m} = C$, so hat man $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - Ck)}$.

Wenn $Ck > \frac{1}{4}a^2$ ist, so giebt es für x keinen möglichen Werth, also giebt es auch gar keine Stelle in der Saugröhre, wo das Wasser stehen bleiben könnte. Dies ist folglich der Fall, wo das Wasser bis in den Stiefel treten wird, und der Ausdruck $2\sqrt{Ck} > a$, oder $2\sqrt{Ch} > C + b$ bestimmt die Umstände, unter welcher dies erfolgen muß. Wenn demnach von den beyden Stücken b und C des Saugwerks eins gegeben ist, so ergiebt der gefundene Ausdruck, wie groß das andre genommen werden müsse,

damit

damit das Waſſer bis in den Stiefel ſteige, und hiernächſt vermittels des Kolbens bis zur Gußröhre gehoben werden könne. Man erhält nämlich $b < 2\sqrt{Ch} - C$, und $C > \frac{aa}{4h}$. Wenn alſo b gegeben iſt, ſo muß C ſo genommen werden, daß $\varphi' > (\frac{\beta' + b}{4h})^2$ bleibt. Falls dieſer Bedingung kein Genüge geſchehen kann, ſo muß b kleiner genommen werden.

Man findet beym Muſchenbroek a. a. O. im 2131 — 2134. §. auf der 870 und 871 S. eben dieſe Sätze: ſie ſind aber bey ihm zu allgemein ausgedrückt, ſo daß es ſcheint, er wolle ſie auch auf Pumpen der mittlern Art angewandt wiſſen, welches aber keineswegs geſchehen darf, wie die folgenden Unterſuchungen ergeben werden.

8. §.

Die Gröſſe des ſchädlichen Raums, nebſt den übrigen Abmeſſungen einer Pumpe der mittlern Art ſind gegeben; man ſucht, wie hoch das Waſſer ſowohl nach dem erſten, als auch den folgenden Kolbenzügen in die Saugröhre hinein treten werde.

Auflöſ. Es ſey (1. Fig.) A die höchſte, und C die niedrigſte Stelle des Kolbens. Die größte Höhe des Kolbens über die Fläche des Waſſers YZ ſey $= a$, die Höhe der Saugröhre $= b$, die Höhe des ſchädlichen Raums $BC = f$, und ſein körperlicher Innhalt $= k^3$, ſo iſt $b + f + c = a$. Die Querſchnitte des Stiefels und der Saugröhre bleiben m und n. Nun erhellet, daß beym erſten Kolbenzuge die in dem ſchädlichen Raum befindliche Luft ſich ausbreiten, alſo auch der in der Saugröhre befindlichen Luft, die anfangs noch die natürliche Federkraft h beſitzt, geſtatten werde,

se, die Klappe B aufzustoſſen, und zum Theil in den Stiefel zu treten. Es ſey $ZX = x$ die Höhe, worauf das Waſſer bey dieſem erſten Kolbenzuge ſteigt, ſo breitet ſich diejenige Luft, welche vorhin den Raum $nb + k^3$ füllte, nun in den Raum $mc + k^3 + n(b - x)$ aus, alſo wird ihre Federkraft $= \frac{nb + k^3}{mc + k^3 + n(b-x)} \cdot k$, und dieſe muß $= k - x$ ſeyn. Hieraus folgt $x^2 - (\frac{mc + k^3}{n} + b + k)\, x = -\frac{mck}{n}$, und man erhält $x = \frac{1}{2}(\frac{mc + k^3}{n} + b + k) - \sqrt{(\frac{1}{4}.(\frac{mc + k^3}{n} + b + k)^2 - \frac{mck}{n})}$.

Wird nun der Kolben niedergedrückt, und dadurch die im Stiefel befindliche Luft verdichtet, ſo drückt dieſe Luft zwar ſogleich das Stiefel-Ventil zu: ſie kann aber das Kolben-Ventil nicht aufſtoſſen, bevor ihre Federkraft anfängt, die Federkraft der äußern Luft zu übertreffen. Geſetzt dies erfolgt allererſt, wenn der Kolben bis in M zurück getreten iſt; ſo wird derjenige Theil Luft, der zwiſchen C und M enthalten iſt, und mit der äußern gleiche Dichtigkeit hat, bey der noch übrigen Bewegung des Kolbens durch das Kolben-Ventil hinaus treten. Der ſchädliche Raum wird mit Luft von natürlicher Dichtigkeit angefüllet bleiben, da im Gegentheil die Federkraft der in der Saugröhre zurückgebliebenen und in den Raum $n(b - x)$ ausgebreiteten Luft $= k - x = k'$ iſt. Demnach wird ſich beym zweyten Kolbenzuge das Ventil B nicht ſogleich öffnen, ſondern alsdann allererſt, wenn die Federkraft der im Raum BC zurückgebliebenen, und ſich nun wieder ausdehnenden Luft anfängt, kleiner als k' zu werden. Geſetzt dies erfolgt, wenn der Kolben bis L geſtiegen iſt, ſo wird der Raum zwiſchen B und $L = \frac{k}{k'} k^3$ ſeyn. Um alſo $XW = Y$ zu finden, d. i. die Höhe, um welche das Waſſer in der Saugröhre beym zweyten Kolbenzuge

ſteigt, muß man die Proportion zum Grunde legen: $mc+k^3+n(\beta=Y)$: $n\beta+\frac{h}{h'}k^3=h'$: $h'-Y$, da dann wie im §. $\beta=b-x$ iſt. Es folgt hieraus die Gleichung

$Y^2-(\frac{mc+k^3}{n}+\beta+h')Y=\frac{(h-h')k^3}{n}-\frac{mch'}{n}$. Daraus wird der Werth von Y leicht gefunden, und man kann hiernächſt auf ähnliche Art ſuchen, um wieviel das Waſſer beym dritten, und den folgenden Kolbenzügen ſteigt.

9. §.

Wenn die Gröſſe des ſchädlichen Raums k^3, nebſt den übrigen Abmeſſungen der Pumpe gegeben iſt; die gröſte Höhe zu finden, worauf das Waſſer in der Saugröhre ſteigen kann.

Aufl. Wäre gar kein ſchädlicher Raum vorhanden, ſo müßte das Waſſer ſo hoch ſteigen können, als die Atmoſphäre es zu tragen vermag, alſo ohngefehr 32. rheiniſche Fuß hoch. Dieſe Höhe aber wird das Waſſer nicht erreichen können, wenn ein ſchädlicher Raum vorhanden iſt. Das Waſſer wird nur ſo lange zu ſteigen fortfahren, bis die in der Saugröhre darüber ſtehende Luft ſo weit verdünnet iſt, daß der Kolben bis zu ſeiner gröſten Höhe hinauf gezogen werden müßte, wenn die im ſchädlichen Raum befindliche Luft auf eben den Grad verdünnet werden ſollte. Sobald nämlich die Luft in dieſen Zuſtand gekommen iſt, kann aus der Saugröhre keine Luft mehr in den Stiefel, auch aus dem Stiefel nichts mehr durch das Kolbenventil in die freye Luft treten. In dieſem Zuſtande iſt alſo die Federkraft der innern Luft $=\frac{k^3}{mc+k^3}h$. Wenn demnach x die gröſte Höhe iſt, die das

Waſſer

Waſſer erreichen kann, ſo muß $\frac{k^3}{mc+k^3}.h = h - x$ ſeyn, folglich iſt $x = \frac{mc}{mc+k^3}.h$. Eben die Gleichung läßt ſich auch ſo ausdrücken $x = \frac{mc:n}{mc;n+k^3:n}.h$, da dann $mc:n$, und $k^3:n$ die auf die Weite der Saugröhre reducirten Höhen des Kolbenzuges und des ſchädlichen Raums ſind. Verſtehet man alſo durch C und F dieſe reducirten Höhen, ſo hat man $x = \frac{C}{C+F}.h$. Dieſer Ausdruck kömmt alsdenn völlig mit Belidors Auflöſung überein. Architect. Hydraul. III. Buch III. Cap. 928. §.

Ich muß hiebey eine ähnliche Erinnerung, wie im 3. §. machen. Belidor und andre Schriftſteller reduciren auch hier allemal die Höhen des ſchädlichen Raums und des Kolbenzuges auf die Weite der Saugröhre, und betrachten ſtatt des eigentlich gegebenen Saugwerks das auf ſolche Art reducirte. So lange die Höhe des Waſſers die Höhe der Saugröhre ſelbſt nicht übertrift, ſteigt das Waſſer in dem einen Saugwerk ſo hoch als in dem andern, und was für das reducirte Saugwerk gefunden iſt, läßt ſich ohne Einſchränkung auf das andre anwenden. Allein, ſobald das Waſſer über die Saugröhre weg in den Stiefel getreten iſt, leidet dies ſeine Ausnahmen.

Dafern die Saugröhre grade die Höhe hätte, welche die Gleichung $x = \frac{C}{C+F}h$ beſtimmt, ſo würde das Waſſer zwar bis an das Stiefel-Ventil gehoben werden, keineswegs aber bis in den Stiefel hineintreten können. Weil aus der erwähnten Gleichung jede von den dreyen Größen x, C, F, gefunden werden kann, wenn zwey davon gegeben ſind, ſo läßt ſich die Einrichtung alle-

mal ſo machen, daß der erwähnten Bedingung ein Genüge geſchehe, daß nämlich das Waſſer endlich bis an das Stiefel-Ventil gehoben werde.

Nimmt man die Höhe der Saugröhre kleiner als $x = \frac{mc}{mc+k^3} \cdot h$, ſo wird das Waſſer endlich in den Stiefel treten, und ſobald dies erfolgt iſt, wird bey fortwährendem Spielen des Kolbens wenigſtens ein Theil der in dem ſchädlichen Raum bisher zurückgebliebenen Luft durch das Kolben-Ventil heraus treten. Indeſſen kann doch das Waſſer nicht bis an die niedrigſte Stelle des Kolbens ſteigen, alſo auch nicht durchs Kolben-Ventil treten, und bis zur Guß-Röhre gehoben werden, bevor alle Luft aus dem ſchädlichen Raum herausgetreten iſt. Dafern dies nicht endlich erfolgen kann, ſo wird das Waſſer nur bis zu einer beſtimmten Höhe im Stiefel gelangen, und in dieſer Höhe unbeweglich ſtehen bleiben, es mag hiernächſt die Bewegung des Kolbens, ſo lange man will, fortgeſetzt werden.

10. §.

Die größte Höhe zu finden, auf welche das Waſſer in dem Stiefel ſteigen kann, falls nicht endlich alle Luft aus dem ſchädlichen Raum heraustritt.

Aufl. Es ſey (1. Fig.) ZN die größte Höhe, die das Waſſer erreichen kann, von der untern Waſſerfläche ZY angerechnet, und $BN = s$ die Höhe deſſelben über das Stiefel-Ventil. Wenn nun der ſchädliche Raum die Geſtalt eines Cylinders hat, deſſen Höhe $= f$, und jeder Querſchnitt $= r$ iſt; ſo wird $k^3 = rf$, und beym niedrigſten Stande des Kolbens iſt der Raum $CN = r(f - s)$ mit Luft von natürlicher Dichtigkeit ausgefüllt. Dieſe

breitet

breitet ſich, indem der Kolben bis A ſteigt, in den Raum AN = $mc + r(f - s)$ aus, folglich wird in dieſem verdünnten Zuſtande ihre Federkraft $= \frac{r(f-s)}{mc+r(f-s)} k$. Dieſe muß nun $= h - b - s$ ſeyn. Beyde Werthe gleich geſetzt geben die Gleichung

$s^2 + (b - f - (\frac{mc}{r}) s = (\frac{mc}{r} + f) b - \frac{mc}{r} h$, alſo $s = \frac{1}{2}$

$(\frac{mc}{r} + f - b) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\frac{mc}{r} + f - b)^2 + (\frac{mc}{r} + f) b - \frac{mch}{r}}$,

oder $s = \frac{1}{2}(\frac{mc}{r} + f - b) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\frac{mc}{r} + f + b)^2 - \frac{mch}{n}}$.

Vermöge der Vorausſetzung iſt das Waſſer ſchon bis in den Stiefel getreten, deswegen iſt nothwendig $b < \frac{mch}{mc+k^3}$ (9. §.) oder $b < \frac{mch:r}{mc:r+f}$, weil hier $k^3 : r = f$ iſt. Demnach iſt auch $(\frac{mc}{r} + f) b < \frac{mch:r}{r}$, folglich $\sqrt{(\frac{1}{4}(\frac{mc}{r} + f - b)^2 + (\frac{mc}{r} + f) b - \frac{mch}{r}} < (\frac{1}{2}\frac{mc}{r} + f - b)$. Wenn alſo $\frac{mc}{r} + f > b$ iſt, ſo ſind beyde Werthe von s poſitiv, und der kleinſte von beyden muß hier gebraucht werden, wie leicht in die Augen fällt. Dafern aber $\frac{mc}{r} + f < b$ iſt, ſo werden alle beyde Werthe von s negativ, und davon kann keiner ſtatt haben. Denn das Waſſer iſt nun über alle beyde Stellen, wo es hängen bleiben könnte, ſchon hinüber.

II. §.

Hieraus laſſen ſich zugleich die Umſtände ſchließen, unter welchen das Waſſer entweder einmal über das Kolbenven-

til hinauf treten, oder nur bis zu einer beſtimmten Höhe im ſchädlichen Raum gehoben werden kann, wenn das Saugwerk zur mittlern Art gehört. Unter den beyden Bedingungen, daß $b < \frac{mch}{r} : (\frac{mc}{r} + f)$ und zugleich $\frac{mc}{r} + f < b$ ſey, wird die Pumpe, falls ſonſt kein Fehler vorhanden iſt, das Waſſer ſicher bis zur Gußröhre heben. Hieher gehört auch noch der Fall, wenn $\frac{mc}{r} + f = b$ iſt, und zugleich $b < \frac{mch}{r} : (\frac{mc}{r} + f)$, weil alsdenn beyde Werthe von s unmöglich werden. Demnach kann nur in dem einzigen Fall das Waſſer im ſchädlichen Raum auf einer beſtimmten Höhe ſtehen bleiben, wenn $\frac{mc}{r} + f > b$ iſt, wenn gleich die andre Bedingung $b < \frac{mch}{r} : (\frac{mc}{r} + f)$ ſtatt hätte. Sollten aber auch in dieſem Fall beyde Werthe von s möglich bleiben, ſo muß nicht $\frac{1}{4}(\frac{mc}{r} + f + b)^2 < \frac{mch}{r}$ ſeyn. Sind dieſe beyden Ausdrücke einander gleich, ſo bleibt das Waſſer in der Höhe $\frac{1}{2}(\frac{mc}{r} + f - b)$ hängen. In allen Fällen aber, wenn $\frac{mc}{r} + f > b$, und $\frac{1}{4}(\frac{mc}{r} + f + b)^2 < \frac{mch}{r}$, alſo $\frac{mc}{r} + f + b < 2\sqrt{\frac{mch}{r}}$ iſt, wird das Waſſer nirgend ſtehen bleiben, ſondern das Saugwerk ſeine gehörige Vollkommenheit haben.

12. §.

12. §.

Herr Parent hat in seinen Recherches de Physique & e Mathematique 1700 acht Aufgaben vorgetragen, welche die heorie der Saugwerke betreffen, und sie damals als neue Lehren kannt gemacht, ohne die Beweise seiner Auflösungen beyzufügen, it einer Aufforderung an die damaligen Kunstverständige, die Be- eise zu suchen. Herr Belidor trägt diese Aufgaben des Herrn arent mit desselben eigenen Worten vor in der Architect. Hy- aul. III Buch III Cap. 919 — 926 §. und entwickelt hiernächst e Theorie, worauf die Auflösungen dieser Aufgaben beruhen. ein Vortrag beruhet mit dem gegenwärtigen auf einerley Grün- n: allein seine Regeln weichen von den hier vorgetragenen, was e Pumpen der mittlern Art betrift, in einigen Stücken ab, und erhaupt hat er die ganze Theorie nicht in ihr völliges Licht ge- et. Es kömmt nämlich das Resultat der ganzen bisherigen Un- ersuchung über die Saugwerke der mittlern Art, auf folgende ätze an.

Wenn $b < \frac{mc}{mc+rf} h$, also die Höhe der Saugröhre iner ist, als die vierte Proportionallinie zur Summe des Raums, rinn der Kolben spielt, und des schädlichen Raums, zum Raum rinn der Kolben spielt, und zur Höhe einer Wasser-Säule, ren Gewicht dem Druck der Atmosphäre gleich ist; so hat das augwerk seine gehörige Vollkommenheit, falls auch überdem $\frac{c}{m} + f$ nicht gröſſer, als b ist. Wenn die erwähnte vierte Pro- tionallinie x heißt, so hat man $mc+rf : mc = h : x$, und ließe sich das erste Verhältniß auch so ausdrücken $\frac{c+rf}{m} : \frac{mc}{m}$, so daß statt des schädlichen Raums, und desje-

nigen

nigen Raums, worinn der Kolben ſpielt, auch ihre auf die Weite der Saugröhre reducirten Höhen gebraucht werden können, vorhin im 10. §. ward eben dies Verhältniß ſo ausgedrückt $\frac{mc}{r}+f$: $\frac{mc}{r}$, alſo ward die Höhe des ſchädlichen Raums ſelbſt, und die auf die Weite des ſchädlichen Raums reducirte Höhe des Kolbenzuges gebraucht. In Anſehung dieſer erſten Bedingung iſt es alſo einerley, ob man beyde Räume auf die Weite der Saugröhre oder des ſchädlichen Raums reducirt. In Anſehung der zweyten Bedingung aber iſt es nicht einerley. Zwar kann man dieſe zweyte Bedingung auch ſo ausdrücken $\frac{mc}{r}+\frac{rf}{n}<\frac{rb}{n}$, aber man ſiehet wohl, daß die Saugröhre alsdenn ſo betrachtet werden müßte, als ob ſie mit dem ſchädlichen Raum einerley Weite hätte.

Dafern außer der erſten Bedingung überdem $\frac{mc}{r}+f>b$ iſt; ſo hat das Saugwerk nur alsdenn ſeine Vollkommenheit, wenn auch $\frac{mc}{r}+b+f<2\sqrt{\frac{mch}{r}}$ iſt. Dieſe letzte Bedingung lieſſe ſich nun auch ſo ausdrücken $\frac{mc}{n}+\frac{rb}{n}+\frac{rf}{n}<2\sqrt{\frac{mc}{n}\cdot\frac{rh}{n}}$, ſo daß wiederum die auf die Mündung der Saugröhre reducirten Höhen des Kolbenzuges und des ſchädlichen Raums in Rechnung gebracht würden: allein alsdenn erhält man nicht allein $\frac{rb}{n}$ ſtatt b, wie vorhin, ſondern überdem auch $\frac{rh}{n}$ ſtatt h. Alſo iſt es bey dieſen Unterſuchungen nicht allgemein verſtattet, ſtatt eines Saugwerks ein andres zu betrachten, das aus dem vorigen entſtehet, wenn man die Höhen des Kolbenzuges und ſchädlichen Raums

auf die Mündung der Saugröhre reducirt. Dies hat **Parent** allemal gethan, und **Belidor** thut es auch: allein eben deßwegen bedarf ihr Vortrag einiger Verbesserung. Wenn der schädliche Raum mit der Saugröhre allemal einerley Weite hätte; so hätte es seine Richtigkeit, daß die Höhe des Kolbenzuges auf die Weite der Saugröhre reducirt werden müßte: allein dieser Fall kömmt in der Anwendung gar nicht vor. Gewöhnlich ist die Weite des schädlichen Raums und des Kolbenzuges einerley, und alsdenn bedarf es gar keiner Reduction, weil beyde Räume sich nun wie ihre Höhen verhalten. Der körperliche Raum der Saugröhre kömmt bey dieser Rechnung gar nicht, sondern allein ihre Höhe in Betrachtung, weil bey gleicher Federkraft der im schädlichen Raum und im Raum des Kolbenzuges ausgebreiteten Luft das Wasser auf einerley Höhe stehen bleibt, die Saugröhre mag weit oder eng seyn. Die Federkraft dieser Luft aber hängt bloß von dem Verhältniß des noch leeren Theils im schädlichen Raum gegen den Raum des Kolbenzuges ab, und gar nicht von der Größe des körperlichen Raums der Saugröhre.

13. §.

Es scheint, daß beyde angeführte Schriftsteller, **Parent** sowohl, als **Belidor**, diesen Umstand übersehen haben: sie könnten sonst nicht die allgemeine Regel geben, daß die Höhen des Kolbenzuges und schädlichen Raums allemal auf die Mündung der Saugröhre reducirt werden müßten. Statt dessen, daß hier im 10. §. die Höhe BN gesucht ist, berechnet **Belidor** a. a. O. 933 §. die Höhe ZN, da denn, wenn die Rechnung richtig ist, beyde Wege auf einerley Resultat führen müssen. Er setzt die Proportion an $c - x : z - x = a : a - x$, und bey ihm ist a das, was hier h heißt, x ist die Summe der Höhen der Saug-

röhre und des schädlichen Raums, $x = ZN$. Allein eigentlich verhält sich der körperliche Raum AN zum körperlichen Raum $CN = a \cdot a - x$, und nach der bisherigen Bezeichnung wäre der körperliche Raum $AN = nb + ff + mx - nb - r(x - b) = mx + rf - r(x - b)$, und der Raum $CN = rf - r(x - b)$, also $mc + rf - r(x - b) : rf - r(x - b) = h : h - x$, oder $\frac{mc}{r} + f + b - x : f + b - x = h : h - x$. Vergleicht man diese Proportion mit der Belidorschen, so siehet man wohl, daß beyde überein kommen, wenn man x statt $f + b$, c statt $\frac{mc}{r}$, und a statt h schreibt: allein auf solche Art muß x die Summe der Höhe der Saugröhre, und der wahren nicht der reducirten Höhe des schädlichen Raums, und b die auf die Weite des schädlichen Raums nicht der Saugröhre reducirte Höhe des Kolbenzuges bedeuten, also die wahre Höhe desselben, wenn der Raum des Kolbenzuges und der schädliche Raum gleich weit sind, die Saugröhre mag eben so weit, oder enger seyn. Die erwähnte Proportion giebt die Gleichung $(mc + rb + rf - rx)(h - x) = rh^2 - rhf - rhx$, woraus $x^2 - (\frac{mc}{r} + b + f)x = -\frac{mch}{r}$, also $x = \frac{1}{2}(\frac{mc}{r} + b + f) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\frac{mc}{r} + b + f)^2 - \frac{mch}{r}}$ folgt. Im 10. §. war $BN = s$, also ist nun $x = b + s$, und $s = x - b$. Setzt man aber $x - b$ statt s in der für s gefundenen Gleichung des 10. §., so kommt die jetzt gefundene Gleichung heraus, daß also beyde Rechnungen richtig überein treffen. Wird x statt $b + f$, c statt $\frac{mc}{r}$, und a statt h gesetzt, so hat man $x = \frac{1}{2}(x + c) \pm \sqrt{(\frac{1}{2}(x + c)^2 - ac)}$, eben so wie Belidor a. a. O. den Werth für x findet, obgleich d[illegible]

derſelbe vermöge der eben vorgetragenen Erinnerungen davon eine unrichtige Anwendung macht. Weil allemal $x > b$ ſeyn muß vermöge der Vorausſetzung, ſo muß vor der Wurzelgröße das Zeichen (+) gebraucht werden, wenn $\frac{1}{2}(x+c) < b$ iſt, obgleich Belidor ſagt, man müſſe allemal das Zeichen (—) brauchen, ſo lange die Wurzelgröße möglich iſt. Dieſe und die übrigen ſchon erwähnten Unrichtigkeiten haben daher ihren Urſprung, weil Belidor ſich durch die Aehnlichkeit dieſer Pumpe der mittlern Art, mit der Pumpe der unvollkommenſten Art hat verführen laſſen, was von der letztern gilt, ohne die nöthige Einſchränkung auf die erſte anzuwenden, und weil er nicht bedacht hat, daß hier bey gegenwärtiger Unterſuchung der ſchädliche Raum eigentlich das werde, was bey der Unterſuchung über die Pumpe der unvollkommenſten Art die Saugröhre war. Parent und Belidor unterſcheiden übrigens ganz richtig die beyden Fälle voneinander, wenn $c+f > b$ iſt, oder nicht, und geben für den letztern Fall die Vorſchrift, daß wenn von dieſen dreyen Stücken c, f, b, zwey gegeben ſeyn, und das dritte geſucht werde, die Rechnung nach den Regeln des 9. §. angeſtellt werden müſſe. Belidor ſagt a. a. O. 927. §. daß in der Verſchiedenheit dieſer Fälle eben der Knoten der parentiſchen Theorie ſtecke: allein er ſelbſt erkläret ſich nicht mit der nöthigen Deutlichkeit über den Grund der Verſchiedenheit dieſer Fälle, der hier im 10. §. deutlich vor Augen gelegt iſt. Beyde geben indeſſen auch für den Fall, wenn $c+f > b$ iſt, die an ſich richtige Regel, daß das Saugwerk alsdenn nur ſeine Vollkommenheit habe, wenn die Wurzelgröße in der zuletzt gefundenen Gleichung unmöglich, alſo $c+f+b > 2\sqrt{ch}$ ſey.

14. §.

Die Höhen des ſchädlichen Raums f und des Kolbenzuges c ſind gegeben, beyde ſollen gleich weit ſeyn, und man ſucht die Höhe der Saugröhre b.

Aufl. Man ſuche den Quotienten $\frac{ch}{c+f}$, und vergleiche denſelben mit der Summe $c+f$. Wenn der erwähnte Quotient nicht kleiner als $c+f$ iſt, ſo wird erfordert, daß $b < \frac{ch}{c+f}$ ſey. (9. §.) Dafern aber der gedachte Quotient kleiner als $c+f$ iſt, ſo muß $c+f+b < 2\sqrt{ch}$, ſeyn, alſo muß man $b < 2\sqrt{ch} - c - f$ nehmen.

Parent giebt folgendes Exempel. Es ſey die Höhe des reducirten Kolbenzuges 8 Fuß, des ſchädlichen Raums 12 Fuß. Das Verhältniß zwiſchen der Weite des Stiefels und der Saugröhre iſt nicht angegeben. Nimmt man an, es ſey wie 2 : 1, ſo ſind die wahren Höhen des Kolbenzuges und ſchädlichen Raums 4 Fuß und 6 Fuß. Nun wird der Quotient $\frac{ch}{c+f} = 12\frac{4}{5}$, und dieſe Zahl iſt größer als $c+f = 10$. Daher genügt es, die Höhe der Saugröhre etwas kürzer als $12\frac{4}{5}$ Fuß zu nehmen. Parent und Belidor ſehen dies Exempel ſo an, als wenn es zum zweyten Fall gehöre, weil die Summe beyder reducirten Höhen des Kolbenzuges und ſchädlichen Raums 20 iſt, und dieſe Zahl den Quotienten $12\frac{4}{5}$ übertrift. Deßwegen ſuchen ſie b aus der Formul $b < 2\sqrt{ch} - c - f$, welcher Ausdruck $= 12$ wird. Dies Reſultat iſt nun zwar von dem vorigen nicht ſonderlich verſchieden, indeſſen war die fernere Rechnung nicht nöthig. In dem reducir-

ducirten Saugwerk muß die Saugröhre kleiner als 12 Fuß seyn. Denn wenn sie 12 Fuß wäre, so würde das Wasser in der Höhe von $\frac{1}{2}(c+f+b) = 16$ Fuß, also vier Fuß hoch über dem Ventil hängen bleiben. In dem natürlichen Saugwerk kann die Saugröhre volle 12 Fuß hoch seyn, weil $\frac{1}{2}(c+f+b) = 11$ ist, und im 10. §. das dortige $s = \frac{1}{2}(c+f-b) = -1$ negativ seyn würde.

15. §.

Die Höhen der Saugröhre b, und des Kolbenzuges c sind gegeben, man sucht die Höhe des schädlichen Raums, wenn derselbe eben soweit als der Stiefel seyn soll.

Aufl. Man suche den Quotienten $\frac{c(h-b)}{b}$, addire dazu die Höhe des Kolbenzuges c, und vergleiche die Summe mit der Höhe der Saugröhre b. Dafern diese Summe nicht größer als b ist; so ist der gefundene Quotient $\frac{c(h-b)}{b}$ die Gränze, welche f nicht übertreffen darf: widrigenfalls muß $c+f+b < 2\sqrt{ch}$, also $f < 2\sqrt{ch} - b - c$ seyn.

Es sey z. E. $c = 4$ Fuß, $b = 12\frac{1}{4}$ Fuß, so wird $\frac{c(h-b)}{b} = 6$. Hiezu $C = 4$ addirt kömmt 10 und dies ist weniger, als $12\frac{1}{4} = b$. Also muß $f < 6$ seyn, und weiter bedarf es keiner Rechnung. Wenn aber $\frac{m}{n} = 2$ wäre, und man wollte nach Belidors Vorschrift rechnen, so müßte man $c = 8$ Fuß nehmen, und dies würde den Quotienten $\frac{c(h-b)}{b} = 12$ Fuß geben, da dann $12 + 8 > 12\frac{1}{4}$ ist. Also würde die Aufgabe zum zweyten

Fall gehören, und man fände $f < 11\frac{1}{4}$. Dies wäre denn die Gränze, welche die reducirte Höhe des schädlichen Raums nicht übertreffen müßte. Die wahre Höhe müßte kleiner als $5\frac{5}{10}$ seyn.

16. §.

Die Höhe der Saugröhre b und des schädlichen Raums f sind gegeben: man sucht die Höhe des Kolbenzuges c, noch in der Voraussetzung, daß Stiefel und schädlicher Raum gleich weit sind.

Aufl. Man suche den Quotienten $\frac{fb}{h-b}$, addire dazu f und vergleiche die Summe mit b, falls diese Summe nicht größer als b ist, so muß $c > \frac{fb}{h-b}$ genommen werden. Dafern aber das Gegentheil statt hat, so muß $c+f+b < 2\sqrt{ch}$ seyn, also $c^2 + 2(f+b)c + (f+b^2) < 4hc$, und $c^2 - (4h - 2f - 2b)c < -(f+b^2)$. Dies giebt $c < 2h - f - b \pm \sqrt{((2h-f-b^2) - (f+b^2))}$, oder $c < 2h - f - b \pm \sqrt{2h}.\sqrt{2(h-f-b)}$. Weil nun allemal $f+b < h$ ist, so ist die Wurzelgröße allemal möglich: und weil eben diese Wurzelgröße kleiner ist, als $2h - f - b$, so sind beyde gefundene Gränzen von c positiv. Mit diesen beyden Gränzen hat es nun eigentlich folgende Bewandniß. Es muß

$c - (2h - f - b) < \pm\sqrt{((2h-f-b^2) - (f+b^2))}$ seyn. Das sind zwey Sätze, und der eine ist dieser

$c - (2h - f - b) < -\sqrt{((2h-f-b^2) - (f+b^2))}$. Da nun allemal $c < h$ ist, und $f+b < h$, so sind diese beyden Werthe negativ, wie erfordert wird, aber eben deßwegen ist wirklich

(2h

$(2h-f-b)-c>\sqrt{((2h-f-b^2)-(f+b^2))}$,

Alſo $c>2h-f-b-\sqrt{((2h-f-b^2)-(f+b^2))}$.

Der andre von den obgedachten Sätzen iſt

$c-(2h-f-b)<+\sqrt{((2h-f-b^2)-(f+b^2))}$.

Hier mag die voranſtehende Größe poſitiv, oder negativ ſeyn, ſo folgt allemal daraus, es ſey

$c<2h-f-b+\sqrt{((2h-f-b^2)-(f+b^2))}$.

Demnach giebt dieſe Rechnung zwo Gränzen, zwiſchen welchen c genommen werden muß, und **Parent** hat ganz recht, wenn er ſagt, daß jede Zahl, die zwiſchen dieſen Gränzen fällt, der Frage ein Genüge leiſte, obgleich **Belidor** a. a. O. 938. §. das Gegentheil ſagt, und nur den kleinſten von beyden Werthen, als den eigentlich geſuchten gelten laſſen will. Es hat zwar ſeine Richtigkeit, daß wegen andrer Urſachen, die von der übrigen mechaniſchen Einrichtung der Pumpe abhängen, gewöhnlich ein Werth genommen wird, welcher der kleinſten Gränze am nächſten kömmt: allein davon iſt hier die Frage nicht, und beyde Gränzen geben eigentlich die vollſtändige Auflöſung der gegenwärtigen Aufgabe: ja man darf ſchlechterdings nicht die Höhe des Kolbenzuges der kleinſten Gränze gleich ſetzen, dafern das Saugwerk nicht ſtecken ſoll, und **Belidor** hätte nicht ſagen ſollen, daß man wohl thue, wenn man c etwas größer nehme, ſondern vielmehr, daß man c etwas größer nehmen müſſe. Uebrigens aber behält es hier ebenfalls bey den gegen alle beyde ſchon verſchiedenemal gemachten Erinnerungen ſein Bewenden. Durch c und f müſſen nicht auf die Weite der Saugröhre reducirte Höhen, ſondern die wahren Höhen des Kolbenzuges und ſchädlichen Raums verſtanden werden, wenn beyde gleich weit ſind. Wären beyde ungleich weit, ſo müßte man durch c die auf die Weite des ſchädlichen Raums, nicht der Saugröhre reducirte Höhe des Kolbenzuges verſtehen.

Es sey z. E. die Höhe des schädlichen Raums 6 Fuß, die Höhe der Saugröhre $12\frac{1}{2}$ Fuß, so findet man den Quotienten $\frac{fb}{k-b} = 4$. Da nun $b+4 < 12\frac{1}{2}$, so bedarf es keiner weitern Rechnung, und man weis, daß $c > 4$ Fuß seyn müsse. Wäre $\frac{m}{n} = 2$, so müßte man nach Parents und Belidors Regel $f = 12$ Fuß nehmen, also $\frac{fb}{k-b} = 8f$. Da nun $12+8 > 12\frac{1}{2}$ ist, so müßte man mit Parent so rechnen

$2(k-f-b) = 14,4$
$\sqrt{2(k-f-b)} = 3.8$
$\sqrt{2k} = 8.$
$\sqrt{2k}\sqrt{2(k-f-b)} = 30,4.$

$k-f-b = 7,2$
$k = 32$
$2k-f-b = 39,2$
$+ 30$

die eine Gränze 8,8
die andre Gränze 69,6.

Die Gränzen der wahren Höhe des Kolbenzuges wären also 4,4, und 34,8 Fuß. Daß übrigens jede zwischen den Gränzen 8,8, und 69,6 fallende Zahl der Bedingung $c+f+b < 2\sqrt{ck}$ ein Genüge thue, davon kann man sich durch Versuche überzeugen, wenn man eine willkührliche Zahl, die zwischen diesen Gränzen fällt, statt c setzt, z. E. $c = 40$. Dies giebt $c+f+b = 64\frac{1}{2}$, und $2\sqrt{ck} = 75,3$, also $c+f+b < 2\sqrt{ck}$. Jede andre Zahl aber, die außerhalb dieser Gränzen fällt, giebt, wenn man sie statt c setzt, $c+f+b > 2\sqrt{ck}$. Setzt man z. E. $c = 70$, so wird $c+f+b = 94,8$, und $2\sqrt{ck} = 94,6$. Setzt man $c = 8$, so findet man $c+f+b = 32,8$, und $2\sqrt{ck} = 31,9$.

Unterſuchung

Ueber die Bewegung des Waſſers im Stiefel, nachdem ſchon alle Luft aus dem ſchädlichen Raum ausgetreten iſt.

17. §.

Die bisherigen Unterſuchungen betrafen die Vollkommenheit eines Saugwerks in Anſehung der anfänglichen Bewegung des Waſſers in der Saugröhre und dem Stiefel, bevor es den Kolben erreicht: und nunmehr ſoll die im 2. §. vorläufig überhaupt erwähnte Unterſuchung darüber angeſtellet werden, mit welcher Geſchwindigkeit der Kolben bewegt werden müſſe, damit die Pumpe bey jedem Hub ohne Zeitverluſt ſoviel Waſſer gebe, als der Raum des Kolbenzuges faſſen kann. Um dieſe Unterſuchung zu erleichtern, ſtelle man ſich vorläufig eine gerade vertical ſtehende cylindriſche Röhre vor, die mit ihrem untern offenen Ende x im Waſſer ſteht. Sie kann übrigens entweder durchgängig von gleicher Weite, oder auch aus mehrern Stücken von verſchiedener Weite zuſammengeſetzet ſeyn. Dieſe ſey etwa 32 Fuß hoch, oben bey Q verſchloſſen, und in derſelben keine Luft befindlich; ſo erhellet, daß der Druck der Atmoſphäre das Waſſer in dieſe Röhre hinauf treiben werde. Es ſey in der Röhre irgendwo bey C eine Klappe, oder ſonſt ein Hindernis befindlich, welches das Waſſer über C hinauf zu ſteigen verhindert, und ſolchergeſtalt nunmehr in Ruhe erhält. Wird nun in einem gewiſſen Augenblick die Klappe C geöfnet, ſo fängt das Waſſer ſogleich an, höher zu ſteigen, und man kann nun fragen: mit welcher Geſchwindigkeit es in dem Augenblick ſteige, da es eine gegebene Höhe Z M erreicht. Wenn O B und B Q Stiefel und Saugröhre eines Saugwerks ſind, ſo befin-

det ſich das Waſſer in dem Stiefel bey jedem neuen Kolbenzuge unter eben den Umſtänden. Indem der Kolben herab ſteigt, und ſich das Stiefel-Ventil ſchließet, wird alles Waſſer unter dem Kolben zur Ruhe gebracht, und bis in den Augenblick, da er ſeine niedrigſte Stelle C erreicht, iſt er das, was eine Klappe bey C wäre, die das Waſſer weiter hinauf zu ſteigen hinderte. So wie der Kolben aber wieder hinauf zu ſteigen anfängt, geſtattet er auch dem unter ihm befindlichen Waſſer nachzufolgen.

18. §.

Lehnſatz. Das Gefäß (3. Fig.) *ABEO* iſt bis auf eine gewiſſe Höhe mit Waſſer gefüllt, und hängt mit einer Röhre *OpqR* zuſammen, ſo daß das Waſſer aus dem Gefäß in die Röhre treten kann. Außer der Schwere drückt noch auf die Oberfläche deſſelben *AB* eine gegebene Kraft, und treibt es aus dem Gefäß in die Röhre hinein, die hier von unbeſtimmter Länge angenommen wird. Man ſetze, im Gefäß habe anfangs das Waſſer bis an *AB*, in der Röhre aber bis an den Querſchnitt *ab* geſtanden, und es habe um im Gefäß den Weg $G\gamma$, in der Röhre aber den Weg *cg* durchlaufen: man ſucht die Geſchwindigkeit der vordern Fläche *PQ*.

Aufl. Wenn GSK*cg* die centriſche Linie derjenigen Querſchnitte CD, HI, MN, u. ſ. f. des Waſſers iſt, welche die Eigenſchaft haben, daß alle in denſelben liegende Waſſertheilchen mit gleicher Geſchwindigkeit fortgehen nach Richtungen, die mit der jedesmaligen Lage der centriſchen Linie übereinkommen, und die centriſche Linie ſelbſt ſowohl auf dieſen Querſchnitten, als auch auf den äußern Flächen CD, PQ, ſenkrecht iſt, ſo ſey CD = Y, PQ = W, ein unbeſtimmter Querſchnitt MN = *x*, das zugehörige

Stück

Stück der centrischen Linie $cKS = s$, und $cg = w$. Wenn ferner K der niedrigste Punct der centrischen Linie, und HI durch diesen Punct horizontal gezogen ist, $\gamma\delta$ und gd aber vertical sind; so sey $\gamma\delta = x$, $gd = u$. Wenn überdem der Druck auf CD so groß ist, als das Gewicht einer Wasser-Säule auf eben dieser Grundfläche in der Höhe p, und der gesuchten Geschwindigkeit die Höhe q zugehört, so hat man nach den Grundsätzen der Hydraulik $\frac{y^2 - w^2}{y^2} q + \frac{w\,dq + 2q\,dw}{dw} \int \frac{ds}{x} = p + x - u$.

Das Integral $\int \frac{ds}{x}$ muß so genommen werden, daß es für $s = -w$ verschwindet, und man muß nach der Integration statt s die Länge der ganzen centrischen Linie CKSγ setzen.

19. §.

Es sey das Gefäß (4. Fig.) $ABEO$ ein grades verticał stehendes Prisma oder ein grader Cylinder, und jeder Querschnitt desselben $= k$. Die Röhre $Opq R$ sey aus zweenen graden Cylindern $OmnR$ und $opqr$ zusammengesetzt, deren Aren Kk und kg in grader Linie liegen, und deren Querschnitte n und m sind: man sucht die Geschwindigkeit der Fläche pq, wenn alles übrige so bleibt, wie es im vorigen §. angenommen worden.

Aufl. Bey diesen Voraussetzungen hat man $Y = k$, $w = m$, $dw = dm = o$, weil m constant ist. Ferner sey $Kk = \beta$, $kc = f$, der Winkel $gkd = \eta$, so ist $gd = u = (\beta + f + w) \sin\eta$. Um nun das Integral $\int \frac{ds}{x}$ zu finden, suche man es zuerst für die Röhre $opqr$, so hat man $\int \frac{ds}{x} = \frac{s+w}{m}$. Man setze $s = ck = f$, so ist dies Integral $= \frac{f+w}{m}$ für die Röhre $opqr$. Für beyde

Röhren zuſammen wird es $= \frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n}$, und weil hier $\delta\gamma = \varepsilon$ iſt, ſo wird es für die ganze Maſſe des Waſſers $= \frac{f+w}{m}$ $+\frac{\beta}{n} + \frac{x}{k}$. Es ſey $\delta G = a$, ſo iſt $x = a - G\gamma = a - \frac{mw}{k}$, alſo $\int \frac{ds}{x} = \frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{a}{k} - \frac{mw}{k^2}$. Alle dieſe Werthe ſetzt man in die Gleichung des vorigen §. ſo wird $\frac{k^2-m^2}{k^2} q + \frac{m\,dq}{dw}$ $\left(\frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{a}{k} - \frac{mw}{k^2} = p + a - \frac{mw}{k} - (\beta + f + w) \sin\eta\right.$

20. §.

Alle übrige Stücke bleiben ſo wie im vorigen §. angenommen iſt, nur iſt das Gefäß *ABEO* in Vergleichung mit der Röhre *O p q R.* ſehr weit, und der Druck auf *CD* beſtändig von einerley Größe: man ſoll die Gleichung zwiſchen q und w finden.

Aufl. Vermöge der Vorausſetzung kann man $\frac{m}{k} = 0$ ſetzen. Weil überdem p eine beſtändige Größe iſt; ſo ſetze man $p + a = A$, und man erhält die Gleichung $q\,dw + (f + w + \frac{m\beta}{n})$ $dq = A\,dw - (\beta + f + w)\,dw \sin\eta = (A - (\beta + f) \sin\eta)$ $dw - w\,dw \sin\eta$. Um das Integral zu finden, ſetze man $f + w + \frac{m\beta}{n} = u$, alſo $w = u - f - \frac{m\beta}{n}$, und $dw = du$, ſo erhält man

$$q\,du + u\,dq = (A - (\beta + f)\sin\eta)\,du - (u - f - \frac{m\beta}{n})\,du \sin\eta,$$

oder

oder $q\,du + u\,dq = (A + (\frac{m\beta}{n} - \beta)\,\sin\eta)\,du - u\,du\,\sin\eta$.

Kürze halber sey $A + (\frac{m\beta}{n} - \beta)\,\sin\eta = B$, so giebt die Integration $uq = Bu - \frac{1}{2}uu\,\sin\eta + C$. Wenn nun $w = o$ ist, so wird $u = f + \frac{m\beta}{n}$, und zugleich $q = o$. Dies giebt die beständige Größe $C = \frac{1}{2}(f + \frac{m\beta}{n})^2\,\sin\eta - B(f + \frac{m\beta}{n})$, folglich ist $u.q = B(u - f - \frac{m\beta}{n} + \frac{1}{2}((f + \frac{m\beta}{n})^2 - uu)\,\sin\eta$. Da nun $u - f - \frac{m\beta}{n} = vv$ ist, so wird $B(u - f - \frac{m\beta}{n}) = (A + (\frac{m\beta}{n} - \beta)\,\sin\eta)\,vv$. Ferner wird $uu = (f + \frac{m\beta}{n})^2 + 2(f + \frac{m\beta}{n})vv + vvvv$, und wenn man diese Werthe gehörig substituirt, so ist die gesuchte Gleichung zwischen q und v gefunden.

21. §.

Weil bey dieser Auflösung die Größe des Winkels $gkd = \eta$ noch unbestimmt geblieben ist, so siehet man wohl, daß auch der Fall darunter begriffen sey, wenn die Röhre OpqR vertical steht. Aber alsdenn ist es gleichviel, ob diese Röhre außerhalb des Gefässes befindlich ist, und unmittelbar an demselben anliegt, so daß das Wasser unten bey O hinein treten kann, oder, ob die Röhre innerhalb des Gefässes im Wasser steht, wie in der 5. Figur. Man hat nun $\sin\eta = 1$, und dieser Voraussetzung gemäß wird $u.q = (A + \frac{m\beta}{n} - \beta)vv - (f + \frac{m\beta}{n})\,vv - \frac{1}{2}vv\,vv = (A - \beta - f)\,vv - \frac{1}{2}vv\,vv$; also $q = \frac{(A - \beta - f)\,nvv - \frac{1}{2}nvv^2}{n(f + vv) + m\beta}$.

Man ſetze $\beta + f = b$, alſo $f = b - \beta$, ſo erhält man $q = \frac{(A-b)\,nvv - \frac{1}{2}\,nvv^2}{n(b-\beta+vv)+m\beta}$, oder $q = \frac{(A-b)\,vv - \frac{1}{2}\,vv^2}{b + \frac{m-n}{n}\beta + vv}$

Dafern aber $b + vv = x$, alſo $vv = x - b$ geſetzt wird, ſo hat man $q = \frac{A(x-b) - \frac{1}{2}(xx - bb)}{x + (m-n)\beta : n}$, oder $q = \frac{n\,A(x-b) - \frac{1}{2}\,n\,(x\,x - b\,b)}{n\,x + (m-n)\,\beta}$.

Wenn beyde Stücke der Röhre O pq R gleich weit ſind, alſo zuſammen nur eine einzige Röhre ausmachen, ſo hat man $m = n$, alſo $q = \frac{(A-b)\,vv - \frac{1}{2}\,vv^2}{b + vv}$, oder auch $q = \frac{n\,A\,(x-b) - \frac{1}{2}\,n\,(x\,x - b\,b)}{n\,x} = A - \frac{1}{2}x - \frac{(A - \frac{1}{2}b)b}{x}$.

22. §.

Die ganze Länge der Saugröhre, (ſ. Fig.) nebſt den Höhen des ſchädlichen Raums, und des Kolbenzuges eines Saugwerks ſind gegeben, nebſt den Querſchnitten des Stiefels und der Saugröhre: man ſucht die Geſchwindigkeit des Waſſers im Stiefel, nachdem es um eine gegebene Höhe CM über den niedrigſten Kolbenſtand geſtiegen iſt. Vorausgeſetzt, daß der Kolben der Bewegung des Waſſers gar nicht hinderlich ſey.

Aufl. Dieſe Aufgabe iſt nur ein beſonderer Fall der vorigen. Gewöhnlich ſteht die Saugröhre in einem Waſſerbehälter, der in Vergleichung mit der Röhre ſehr weit iſt. Die Atmoſphäre drückt auf die Oberfläche des Waſſers in dieſem Behälter, und treibt das Waſſer über die niedrigſte Stelle des Kolbens im Stiefel

fel hinauf, sobald der Kolben hinauf gezogen wird. Man setze also die Länge der ganzen Saugröhre $= \beta$, die Höhe des schädlichen Raums $= f$, die Tiefe, um welche die Saugröhre im Wasser steht, $OZ = a$, die Federkraft der Atmosphäre $= h$, die Höhe, um welche das Wasser im Stiefel gestiegen ist, $CM = w$, die Querschnitte des Stiefels $= m$, und der Saugröhre $= n$, die gesuchte Geschwindigkeit $= \sqrt{q}$, so ist $q = \frac{(a+h-\beta-f)w-\frac{1}{2}vv^2}{f+w+\frac{m}{n}\beta}$;

oder auch $q = \frac{(A-b)w-\frac{1}{2}w^2}{b+\frac{m-n}{n}\beta+w}$, wenn man A statt $a+h$, und b statt $\beta+f$ schreibt: oder $q = \frac{A(x-b)-\frac{1}{2}(xx-bb)}{\frac{m-n}{n}\beta+x}$, wenn man $b+w=x$ setzt. In dem Fall, wenn Stiefel und Saugröhre gleiche Weite hätten, also $m=n$ wäre, erhielte man $q = \frac{(A-b)w-\frac{1}{2}w^2}{b+w}$, oder $q = A-\frac{1}{2}x-\frac{(A-\frac{1}{2}b)b}{x}$.

23. §.

Belidor stellt in der Architectura Hydraul. im III Kap. des III Buchs 906. u. f. §. §. eben diese Untersuchung an: allein er bringt ein ganz andres Resultat heraus. Man hatte sonst gewöhnlich $q = \frac{n^2}{m^2}(h-x)$ angenommen, wenn durch x die Höhe ZM des Wassers über die untere Wasserfläche YZ verstanden wird, und Belidor meldet a. a. O. im 907. §., daß er selbst diese Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers im Stiefel für die richtige gehalten habe, bis er endlich bey Berechnung einer von ihm erfundenen Maschine den Fehler eingesehen, und verbessert hätte. Allein ihm sind bey Verfertigung seines vortreflichen Werks, welches im Jahr 1737. zu Paris herausgegeben

ist,

iſt, die von den beyden Herrn Bernoulli um eben die Zeit gemachten neuen Entdeckungen in der Hydraulik noch nicht bekannt geweſen, und ſeine Auflöſung dieſer Aufgabe iſt eben ſo wenig richtig, als die alte von ihm getadelte Auflöſung. Er findet $\sqrt{q} = \frac{n}{m}(\sqrt{h} - \sqrt{x})$, alſo $q = \frac{n^2}{m^2}(h - 2\sqrt{hx} + x)$, und Muſchenbroeck trägt in der Introd. ad Phil. Nat. T. II. §. 2148 - 2152. p. 878 - 880. ebenfalls dieſe belidoriſche Theorie vor. Beyde verſtehen alsdenn durch h die Höhe einer Waſſerſäule, deren Gewicht dem Druck der Atmoſphäre gleich iſt, und durch x die Höhe ZM des Waſſers über den Waſſerpaß YZ. Aber dieſe Beſtimmung hat mit der vom Herrn Belidor getadelten ältern Beſtimmung verſchiedene Hauptfehler gemein. Einmal hängt keine derſelben vom niedrigſten Kolbenſtande ab, da es doch gewiß nicht einerley iſt, in welcher Höhe das Waſſer ſeine Bewegung von der Ruhe anfängt. Fürs zweyte müßte nach beyden Beſtimmungen $q = o$ ſeyn, wenn $x = h$ iſt, oder das Waſſer müßte nur etwa 32 Fuß hoch ſteigen können, welches wiederum falſch iſt. Endlich müßte noch fürs dritte die Geſchwindigkeit des ſteigenden Waſſers im erſten Anfang des Kolbenhubs am größten ſeyn, und hiernächſt beſtändig abnehmen. Daß auch dies fehlerhaft ſey, werden die folgenden Unterſuchungen mit mehrern ergeben. Ich habe beym Nachſchlagen niemand gefunden, der dieſe Theorie von den Pumpen aus den nunmehr richtig erwieſenen Geſetzen der Hydraulik hergeleitet hätte. Die Herrn Johann und Daniel Bernoulli haben die Gründe davon erfunden. Beyde aber haben davon keine weitere Anwendung auf die Saugwerke gemacht. Ihre Unterſuchungen über die Geſchwindigkeit, womit das Waſſer in einer verticalen durchaus gleich weiten cylindriſchen Röhre aufwärts ſteigt, wenn die Röhre in einem ſehr weiten Waſſerbehälter ſteht, und anfangs die Höhe des Waſſers

Verſuch
eines
evidenten Beweiſes
der
allgemeinen
mechaniſchen Grundſätze.

von

W. J. G. Karſten.

1768.

$A-(b+w)>q$ ist, folglich wächst q so lange, als diese Voraussetzung statt hat, und nimmt wieder ab, wenn $q>A-(b+w)$ wird. Die Geschwindigkeit des Wassers muß also am größten seyn, wenn $A-(b+w)=q$ ist, denn nun ist $dq=o$.

25. §.

Die größte Geschwindigkeit zu finden, die das im Stiefel hinauf steigende Wasser erreichen kann, nebst der Höhe, auf welche es steigen muß, bevor die Geschwindigkeit am größten wird.

Aufl. Es ist die der größten Geschwindigkeit zugehörige Höhe $q=A-(b+w)$, und der unbestimmte Werth von q ist $=\frac{(A-b)w-\frac{1}{2}w^2}{b+\lambda\beta+vv}$, wenn man Kürze halber $\frac{m-n}{n}=\lambda$ setzt. Beyde Werthe einander gleich gesetzt geben die Gleichung $A(b+vv)-(b+vv^2)+A\lambda\beta-\lambda\beta(b+vv)=(A-b)vv-\frac{1}{2}vv^2$, und daraus folgt

$$vv^2+(b+\lambda\beta)vv=2(A-b)\lambda\beta+2(A-b)b,$$

folglich $vv=-(b+\lambda\beta)\pm\surd(\lambda^2\beta^2+2A\lambda\beta+2(A-b)b)$. Der negative Werth kann hier nicht gebraucht werden, sondern der positive ist der gesuchte. Und wenn derselbe statt vv in die Gleichung $\surd q=\surd(A-b-vv)$ gesetzt wird, so ergiebt sich die gesuchte größte Geschwindigkeit.

Weil sich der gefundene Werth von vv auch so ausdrücken läßt: $vv=\surd((b+\lambda\beta^2)+2(A-b)(b+\lambda\beta))-b+\lambda\beta$, so erhellet, daß allemal $vv<A-b$ sey, weil die Wurzelgröße kleiner als $b+\lambda\beta+(A-b)$ ist. Je kleiner indessen $A-b$ selbst in Vergleichung mit $b+\lambda\beta$ ist, desto näher kömmt die Wurzelgröße diesem Werth $b+\lambda\beta+(A-b)$ folglich kömmt zugleich

ob dem Werth $A - b$ deſto näher. Bey der gewöhnlichen Einrichtung der Saugwerke findet dieſe Vorausſetzung allemal ſtatt, daß $b + \lambda\beta$ in Vergleichung mit $A - b$ ziemlich groß iſt. Daher wird das in dem Stiefel hinauf ſteigende Waſſer auch gewöhnlich ſo lange mit zunehmender Geſchwindigkeit ſteigen, bis es mehrentheils 31 bis 32 Fuß hoch über die Oberfläche desjenigen Waſſers erhaben iſt, worinn die Saugröhre ſteht.

26. §.

Hiedurch wird alſo dasjenige beſtättiget, was am Ende des 23. §. behauptet worden. Es iſt falſch, daß das Waſſer gleich vom Anfange mit abnehmender Geſchwindigkeit ſteige: vielmehr erfolgt grade das Gegentheil, es ſteigt mit zunehmender Geſchwindigkeit. Nur in dem einzigen Fall, wenn der Stiefel und die ganze Saugröhre gleich anfangs von Luft und Waſſer leer wären, ſo würde die Geſchwindigkeit des hinein tretenden Waſſers aufs ſchnelleſte, und faſt augenblicklich bis zur größten anwachſen, und hiernächſt wieder beſtändig abnehmen. Die größte Geſchwindigkeit ſelbſt wäre alsdenn $= \surd A$. Man müßte nämlich für dieſen Fall $b = o$ und $\beta = o$ ſetzen. Dies giebt den Werth von $vv = o$, welcher der größten Geſchwindigkeit zugehört, und die größte Geſchwindigkeit ſelbſt $\surd q = \surd A$. Dies ſcheint den vorigen Vorausſetzungen entgegen zu ſeyn, vermöge welcher $q = o$ ſeyn mußte, wenn $vv = o$ iſt. Allein man muß ſich hiebey erinnern, daß die bisherigen Rechnungen in der That nur Näherungen ſind, und daß im 20. §. $\frac{m}{k} = o$ geſetzt ſey. Daſſern man in der dortigen Differentialgleichung nur die in $\frac{m^2}{k^2}$ multiplicirten Glieder wegläßt, und $\int n\eta = 1$ ſetzt, wie hier erfor-

dert wird, ſo hat man $q\,dvv + (f + vv + \frac{n\beta}{n} + \frac{na}{k})\,dq = (A - \beta - f)\,dvv - (\frac{n}{k} + 1)\,vvdvv$. Man ſetze überdem der jetzigen Vorausſetzung gemäß $\beta = 0$, $f = 0$, $n = n$, ſo wird $qdvv + (\frac{na}{k} + vv)\,dq = A\,dvv - (\frac{n}{k} + 1)\,vv\,dvv$. Ferner ſey $\frac{na}{k} + vv = z$, alſo $vv = z - \frac{na}{k}$, und $dvv = dz$, ſo erhält $qdz + zdq = (A + \frac{na}{k})\,dz - (\frac{n}{k} + 1)\,zdz$, und dies giebt $zq = (A + \frac{na}{k})\,z - \frac{1}{2}(\frac{n}{k} + 1)\,z^2 + C$. Für $vv = 0$ iſt $z = \frac{na}{k}$, und $q = q$, alſo $C = -\frac{na.A}{k}$. Wenn man nun den Werth $z = \frac{na}{k} + vv$ wieder herſtellt, und die höhern Potenzen von $\frac{n}{k}$ wegläßt, ſo erhält man $q(\frac{na}{k} + vv) = A\,vv - \frac{1}{2}(n + k)\,vv^2$, folglich $q = \frac{A\,k\,vv - \frac{1}{2}(n + k)\,vv^2}{na + k\,vv}$. Dieſe Gleichung giebt $q = 0$ für $vv = 0$, wie erfordert wird: ſo bald aber nur ein ſehr kleiner Werth ſtatt vv geſetzt wird, iſt ſehr nahe $q = A$.

Wenn nun ferner, um die größte Geſchwindigkeit zu finden, $dq = 0$ geſetzt wird, ſo hat man $q = A - (\frac{n}{k} + 1)\,vv$, und dieſer Werth dem vorigen gleich geſetzt giebt $(\frac{na}{k} + vv)\,(A - (\frac{n}{k} + 1)\,vv) = A\,vv - \frac{1}{2}(\frac{n}{k} + 1)\,vv^2$, alſo $\frac{1}{2}(n + k)\,vv^2 + navv$

$nnvv = naA$, woraus $vv^2 + \frac{2na}{n+k}vv = \frac{2naA}{n+k}$, alſo $vv = \frac{\sqrt{(n^2a^2(n+k)+2naA)} - na}{n+k}$ folgt. Demnach iſt vv ungemein klein, wenn k ſehr groß iſt, und für $k = \infty$, würde $vv = 0$ ſeyn. Eigentlich iſt alſo in dem jetzt betrachteten Fall die der größten Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $= A - \frac{1}{k}(\sqrt{(n^2a^2(n+k)+2naA)} - na)$.

27. §.

Es bleiben alle gegebene Stücke, (ſ. Fig.) wie im 22. §. man ſucht die Zeit, worinn das Waſſer im Stiefel um eine gegebene Höhe $CM = vv$ ſteigt.

Aufl. Es iſt $dt = \frac{dvv}{\sqrt{q}}$, wenn alſo der Werth von q aus dem 22. §. gebraucht wird, ſo erhält man $dt = \frac{dvv\sqrt{(b+\lambda\beta+vv)}}{\sqrt{(A-b)vv - \frac{1}{2}vv^2)}}$. Um das Integral hievon ohne weitläuftige Rechnung ſo genau zu finden, als bey dergleichen practiſchen Unterſuchungen genügen kann, darf man nur erwägen, daß in der Anwendung auf das Saugwerk allemal $b + \lambda\beta$ beträchtlich größer ſey, als vv, weil vv nicht leicht über 4 Fuß ſeyn wird, b und β aber gewöhnlich einige 20 Fuß groß ſind, auch meiſtentheils $\lambda > 1$ iſt. Setzt man nun Kürze halber $b + \lambda\beta = B$, ſo iſt beynahe $\sqrt{(B+vv)} = \sqrt{B}$. Eigentlich iſt $\sqrt{(B+vv)} > \sqrt{B}$, und $\sqrt{(B+vv)} < \sqrt{B} + \frac{vv}{2\sqrt{B}}$, da denn dieſe letztere Betrachtung dazu dienet, ein paar Gränzen zu finden, zwiſchen welchen t fällt, die ſehr wenig voneinander werden unterſchieden ſeyn.

werden. Ich weis, daß dies groſſe Mathematiker veranlaſſet hat, Beweiſe zu ſuchen, wodurch die Nothwendigkeit dieſer Gleichung außer Zweifel geſetzt werden möchte, und ich geſtehe einem jeden der bisher bekannten Beweiſe ſein Gewicht zu. Mich hat unter allen die ich geleſen habe, des H. Karſtners Beweis in ſeinen Anfangsgründen der höhern Mechanik am meiſten befriediget. Eben dieſer Kaſtneriſche Vortrag einer Theorie, worüber ich ſchon damals, wie ſich das angeführte Buch erhielt, verſchiedentliche Unterſuchungen angeſtellet hatte, hat mich veranlaſſet, dieſelbe Unterſuchung aufs neue vorzunehmen.

2. §.

Es iſt ſo lange noch nicht, daß man angefangen hat, die Statik und Mechanik als beſondere Wiſſenſchaften abzuhandeln, und einer jeden derſelben ihre beſtimmten Gränzen zu ſetzen. Soviel mir bekannt iſt, haben die Herrn de la Hire, Maclaurin, und Karſtner die Geſetze des Gleichgewichts feſter Körper allererſt zur überzeugenden Richtigkeit gebracht, und das giebt der Statik ihre vorzüglichſte Schönheit, wenn man wie dieſe Männer alle Geſetze des Gleichgewichts aus dem Begrif der Preſſungen herleitet, ohne die Betrachtung von Zeit, Raum und Geſchwindigkeit im geringſten zu Hülfe zu nehmen. Ich habe den Verſuch gemacht, beym Vortrag der Theorie von den beſchleunigenden Kräften ein Verfahren anzubringen, das demjenigen ähnlich iſt, deſſen ſich obgedachte Geometer mit ſo glücklichem Erfolg bedienet haben, die Theorie vom Hebel zu beweiſen, und ich werde es in der folgenden Abhandlung der churfürſtlichen Akademie zur Prüfung vorlegen. Ich ſetze hiebey die Galiläiſche Theorie von dem freyen Fall ſchwerer Körper als bekannt voraus. Durch Betrachtung des Falles ſchwerer Körper lernt man am beſten alle diejenigen

werden muß, damit das Saugwerk ohne Zeitverluſt bey jedem Kolben-Zub ſoviel Waſſer gebe, als der Raum des Kolbenzuges faſſen kann.

Aufl. Die Geſchwindigkeit des Kolbens muß ſo groß ſeyn, daß derſelbe in eben der Zeit um die Höhe des Kolbenzuges ſteigt, binnen der das Waſſer im Stiefel eben dieſe Höhe erreicht. Man ſuche alſo nach dem vorigen §. die Zeit, binnen der das Waſſer vom niedrigſten bis zum höchſten Kolbenſtande ſteigt, und ſetze dieſe $= t$. Iſt nun die Höhe des Kolbenzuges $= vv$, die Geſchwindigkeit des Kolbens $= v$, ſo iſt die Zeit, binnen der derſelbe den Weg $= vv$ zurück legt, $= \frac{vv}{v}$, weil er mit gleichförmiger Bewegung ſteigt. Dieſe Zeit muß $= t$ ſeyn; alſo hat man $v = \frac{vv}{t}$.

Es ſey z. E. $\beta = 21\frac{1}{2}$ Fuß, $f = \frac{1}{2}$ Fuß, alſo $b = 22$ Fuß $vv = 2$ Fuß, der Durchmeſſer der Mündung des Stiefels $= 6$ Zoll, der Mündung der Saugröhre $= 2\frac{1}{6}$ Zoll, alſo $m : n = 36 : \frac{169}{36} = 1296 : 169$, und $\frac{m-n}{n} = \frac{1127}{169} = 6,668639$; ſo wird $b + \frac{m-n}{n}\beta = 165,375738 = B$, und $\sqrt{2B} = 18,1865$. Wenn man nun $k = 31$ Fuß ſetzt, und $a = 6$ Fuß iſt, ſo wird $A = a + k = 37$ Fuß, alſo $A - b = c = 15$ Fuß, und $\frac{vv}{c} = \frac{2}{15} = 0,1333333$. Dieſer Querſinus gehört zum Winkel von $29°56'$, und man erhält A. $29°56' = 0,522427$. Setzt man nun voraus, daß das gebrauchte Maaß das franzöſiſche ſey, ſo iſt $g = 15,1$ Fuß, und $2\sqrt{g} = 7,7716$. Demnach wird $t = \frac{\sqrt{2B}}{2\sqrt{g}} A \, ſo \, \frac{vv}{c} = 1,223$ Secunden, ſo daß dieſe Zeit noch nicht völlig $1\frac{1}{4}$ Se-

cun-

cunde beträgt. Wollte man ſich davon verſichern, daß die Zeit genau genug gefunden ſey, ſo müßte man noch den Ausdruck $\frac{c}{2\sqrt{g}\sqrt{2B}}(A\,\mathit{ſin}\,v\frac{vv}{c} - \mathit{ſin}\,A\,\mathit{ſin}\,v\frac{vv}{c})$ berechnen. Man findet aber

$$A\,\mathit{ſin}\,v\frac{vv}{c} = 0,522427$$

$$\mathit{ſin}\,A\,\mathit{ſin}\,v\frac{vv}{c} = 0.498992$$

die Differenz = 0. 023435

und die übrige Rechnung ergiebt für den erwähnten Ausdruck 0, 00248 Sec. Da nun der Fehler in Beſtimmung der Zeit nach der erſten Formul nicht ſo groß iſt, als dieſe Zahl; ſo iſt jene Rechnung ſo weit es hier erfordert wird, zulänglich richtig. Man muß indeſſen wegen der Friction und andrer Hinderniſſe der Bewegung dieſe Zeit etwas weniges größer annehmen, als die Rechnung giebt, und man kann ſie im gegenwärtigen Exempel auf $\frac{1}{4}$ Secunden ſchätzen. Dies würde alſo für die Geſchwindigkeit des Kolbens $3\frac{3}{5}$ Fuß oder 1 Fuß $7\frac{1}{5}$ Zoll in einer Secunde geben.

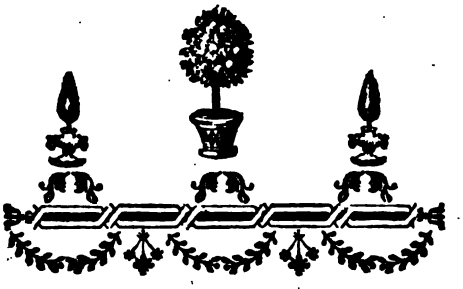
29. §.

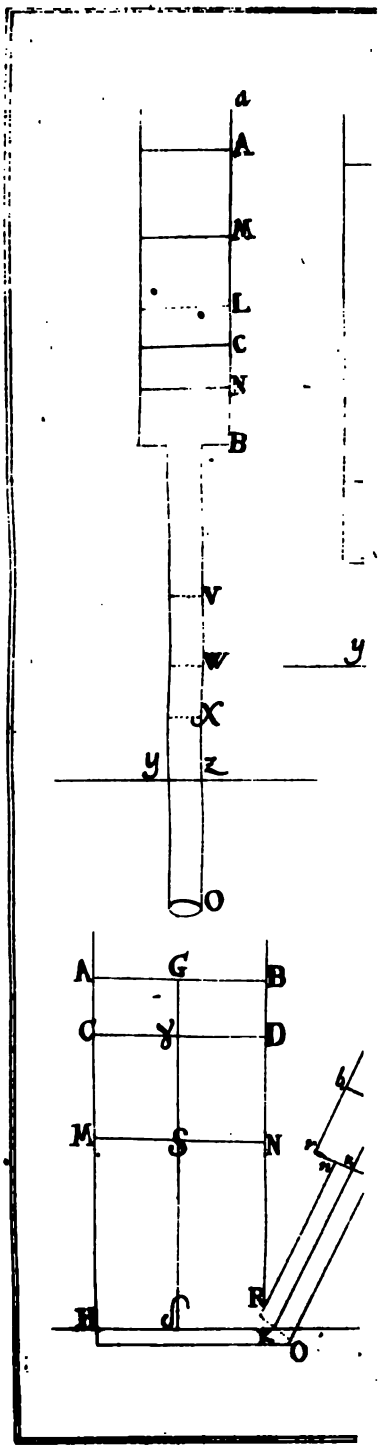
Dies Exempel iſt aus Belidors Architectura Hydraulica III Buch, III Cap. 911. §. genommen, woſelbſt aber außer den Querſchnitten des Stiefels, und der Saugröhre keine andre data angegeben ſind, als die größte Kolbenhöhe von der Oberfläche des Waſſers, welches das Saugwerk herauf ziehen ſoll = 18 Fuß, und die Höhe des Kolbenzuges = 2 Fuß. Die Tiefe, um welche die Saugröhre unter Waſſer ſteht, iſt hier 6 Fuß groß angenommen, daher kommen die Höhen über dem Waſſer mit den Belidorſchen überein. Belidor braucht nach ſeiner Theorie nicht mehr

data,

data, und nach derselben wäre die Geschwindigkeit des Wassers in der Saugröhre in dem Augenblick, da es die Höhe von 18 Fuß erreicht = 10, 2979 Fuß in einer Secunde, und die Geschwindigkeit des Wassers im Stiefel $= \frac{10,2979 \times 169}{1296} = 1,34$ Fuß, also 1 Fuß 4 Zoll. Nach der alten von H. Belidor getadelten Regel würden auf 28 Fuß für diese Geschwindigkeit heraus kommen, welches also eine ungemein fehlerhafte Regel ist. Wollte man aber nach der richtigen Formul des 22. §. $q = \frac{(A-b)vv - \frac{1}{2}vv^2}{b + \frac{m-n}{n}\beta + vv}$ die Geschwindigkeit berechnen, womit das Wasser den höchsten Kolbenstand erreicht; so würde man 3, 18 Fuß finden. Hieraus ergiebt sich, daß Belidor jene sonst gebräuchlich gewesene Regel für die Bestimmung der Geschwindigkeit des Kolbens mit Recht tadle, weil sich wirklich bey einer so grossen Geschwindigkeit des Kolbens der Raum des Kolbenzuges nicht ganz mit Wasser würde anfüllen können. Seine eigene Regel giebt zwar auch eine unrichtige Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers im Stiefel. In Absicht der andern Anwendung aber, welche er davon macht, um die Geschwindigkeit des Kolbens zu finden, kömmt sie der Sache ungemein viel näher. Sie giebt gewöhnlich die Geschwindigkeit des Kolbens noch etwas kleiner als nöthig ist, da sie im Gegentheil nach der andern Regel sehr viel zu groß würde gefunden werden. Wie sehr übrigens beyde Regeln von der richtigen Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers abweichen, fällt am meisten in die Augen, wenn man nach dem 25. §. die größte Geschwindigkeit desselben berechnet, und die Höhe vv, um welche es steigen müßte, wenn es bis zu dieser Geschwindigkeit gelangen sollte. Man findet diese größte Geschwindigkeit im gegenwärtigen Exempel von 6, 14 Fuß in einer Secunde, und das Wasser müß-

te 14, 375 Fuß hoch über den niedrigſten Kolbenſtand ſteigen, wenn es zu dieſer Geſchwindigkeit gelangen ſollte. Für dieſen einzigen Fall giebt die vormalige Regel die Geſchwindigkeit des Waſſers richtig, Belidors Regel aber giebt ſie viel zu klein.




a
A
M
L
C
N
B
V
W
X
y
y
z
O
A
G
B
C
y
D
M
S
N
H
F
O

Verſuch
eines
evidenten Beweiſes
der
allgemeinen
mechaniſchen Grundſätze.

von
W. J. G. Karſten.
1768.

Versuch
eines
evidenten Beweises der allgemeinen mechanischen Grundsätze.

Es scheinet fast, daß es leichter sey, die Gränzen solcher Wissenschaften, dergleichen die physisch-mathematischen in ihrem gegenwärtigen Zustande sind, zu erweitern, als den Vortrag ihrer ersten Grundlehren recht evident zu machen. Man hat in der Mechanik seit Galilâi Zeiten ungemein grosse Progressen gemacht, und dies ist vornehmlich durch Hülfe der Differential- und Integralrechnung geschehen. Indessen weis man, daß die Fundamental-Gleichung der ganzen Mechanik $dc = p\,dt$ dem H. Dan. Bernoulli noch nicht so erwiesen zu seyn schien, daß sie verdiene in die Klasse nothwendiger Wahrheiten aufgenommen zu

werden. Ich weis, daß dies groſſe Mathematiker veranlaſſet hat, Beweiſe zu ſuchen, wodurch die Nothwendigkeit dieſer Gleichung außer Zweifel geſetzt werden möchte, und ich geſtehe einem jeden der bisher bekannten Beweiſe ſein Gewicht zu. Mich hat unter allen, die ich geleſen habe, des H. Karſtners Beweis in ſeinen Anfangsgründen der höhern Mechanik am meiſten befriediget. Eben dieſer Kaſtneriſche Vortrag einer Theorie, worüber ich ſchon damals, wie ſich das angeführte Buch erhielt, verſchiedentliche Unterſuchungen angeſtellet hatte, hat mich veranlaſſet, dieſelbe Unterſuchung aufs neue vorzunehmen.

2. §.

Es iſt ſo lange noch nicht, daß man angefangen hat, die Statik und Mechanik als beſondere Wiſſenſchaften abzuhandeln, und einer jeden derſelben ihre beſtimmten Gränzen zu ſetzen. Soviel mir bekannt iſt, haben die Herrn de la Hire, Maclaurin, und Karſtner die Geſetze des Gleichgewichts feſter Körper allererſt zur überzeugenden Richtigkeit gebracht, und das giebt der Statik ihre vorzüglichſte Schönheit, wenn man wie dieſe Männer alle Geſetze des Gleichgewichts aus dem Begrif der Preſſungen herleitet, ohne die Betrachtung von Zeit, Raum und Geſchwindigkeit im geringſten zu Hülfe zu nehmen. Ich habe den Verſuch gemacht, beym Vortrag der Theorie von den beſchleunigenden Kräften ein Verfahren anzubringen, das demjenigen ähnlich iſt, deſſen ſich obgedachte Geometer mit ſo glücklichem Erfolg bedienet haben, die Theorie vom Hebel zu beweiſen, und ich werde es in der folgenden Abhandlung der churfürſtlichen Akademie zur Prüfung vorlegen. Ich ſetze hiebey die Galiläiſche Theorie von dem freyen Fall ſchwerer Körper als bekannt voraus. Durch Betrachtung des Falles ſchwerer Körper lernt man am beſten alle diejenigen

3. §.

Es ſey AB die Verticallinie, worinn eine ſchwere Maſſe, hier als ein Punct betrachtet wird, frey herab fällt, und dieſer ınct falle in der erſten Secunde von A bis C. Setzt man nun C = g, ſo iſt am Ende der erſten Secunde des Puncts Gewindigkeit = 2 g. Man iſt gewohnt ſo zu reden, die Schwehabe den Punct C während der erſten Secunde die Geſchwinkeit 2 g mitgetheilt, und dieſe Redensart iſt der Sache ſehr ht angemeſſen. Wenn nämlich die Schwere am Ende der er- Secunde zu wirken aufhörte, ſo würde der Punct in der zwey- Secunde den Weg = 2 g vermöge ſeiner Trägheit gleichför- zurück legen. Die Schwere hat den Punct in dieſen Zuſtand Bewegung verſetzt, denn wenn ſie gar nicht gewirkt hätte; ſo e der Punct in dem Zuſtand der Ruhe geblieben.

4. §.

gelegt worden. Hätte die Schwere zu wirken aufgehört, nachdem die erste Helfte der Secunde verflossen war, so hätte die Masse schon die Geschwindigkeit g gehabt, sie hätte in der ersten Helfte den Weg $\frac{1}{4}$ g und in der zweyten Helfte den Weg $\frac{1}{2}$ g zurückgelegt. Daher würde eine besondre Rechnung nöthig seyn, wenn man das, was von der Schwere unmittelbar herrührt, von demjenigen unterscheiden wollte, was der Trägheit zukömmt. Allein es ist bey dieser Untersuchung nicht nöthig soweit zu gehen. Die Masse würde gar nicht von der Stelle gekommen seyn, wenn die Schwere gar nicht gewirkt hätte, und eben die Masse würde auch in der ersten Secunde nicht den ganzen Weg AC zurück gelegt haben, wenn die Schwere nicht während dieser ganzen Secunde ununterbrochen gewirkt hätte. Demnach rührt es doch von der Schwere her, nicht allein, daß die Masse in Bewegung kömmt, sondern auch grade diesen und nicht einen kleinern Weg in der ersten Secunde zurück legt. Und in dieser Bedeutung ist es nicht unrichtig geredet, wenn man sagt, die Schwere treibe die Masse in der ersten Secunde um den Weg AC fort. In eben der Bedeutung soll demnach diese Redensart in der Folge gebraucht werden.

5. §.

Die Masse falle ferner in zwo Secunden bis D, so ist AD = 4 g, und CD = 3 g; wenn man also CE = 2 g nimmt, so ist dies der Weg, um welchen die Masse allein wegen der Trägheit fortgerückt wäre, wenn die Schwere während der zweyten Secunde nicht gewirkt hätte. Aber wegen fortdaurender Wirkung der Schwere rückt die Masse in der zweyten Secunde um das Stück ED = g = AC weiter. Fällt eben die Masse in drey Secunden bis F, so ist F = 9 g und DF = 5 g. Ohne Zuthun der Schwere wäre die Masse in der dritten Secunde um das Stück

DG = 4 g weiter gerückt, wegen der Schwere aber geht die Maſſe außerdem noch um das Stück GF = ED = AC weiter. Eben ſo geht es in jeder folgenden Secunde. Das Stück, um welches die Maſſe wegen fortdaurender Wirkung der Schwere jedesmal weiter rückt, als ſie allein wegen der Trägheit gerückt wäre, iſt immer von einerley Größe, allemal ſo groß, als der Weg, durch welchen die Maſſe in der erſten Secunde fällt.

6. §.

Man muß demnach zweyerley Wirkung der Schwere unterſcheiden. Sie bewegt einen Körper entweder wirklich, oder ſie drückt ihn gegen einen Widerſtand, der die Bewegung hemmet. Beyde Wirkungen ſind nur wegen der äußern Umſtände unterſchieden, unter welchen ſich der Körper befindet. Denn eigentlich iſt dasjenige, was den Körper bewegt, völlig einerley mit dem, was ihn gegen den Widerſtand preßt, der die Bewegung aufhält: und wenn der Körper wirklich ſinkt, ſo wirkt die Schwere in jedem Punkt ſeines Weges eben ſo auf ihn, wie ſie alsdenn thut, wenn der Körper auf einer horizontalen Tafel ruhig liegt. Eben das, was wir im letzten Fall den Druck nennen, theilt der Maſſe, nachdem der Widerſtand gehoben iſt, in einer gewiſſen Zeit eine gewiſſe Geſchwindigkeit mit, indem ſie die Maſſe von einer gewiſſen Höhe herab treibt. Dieſe letztere Wirkung der Schwere heißt ihre **Beſchleunigung**, ſo wie jene Wirkung am füglichſten ihre Preſſung, oder ihr Druck heißt. Will man **beſchleunigende Kraft der Schwere**, **drückende Kraft der Schwere** ſagen, ſo hat man ſeine Freyheit, nur muß man nicht vergeſſen, daß beydes völlig einerley Kraft ſey, die nur deswegen verſchiedene Nämen führt, weil ihre Wirkungen auf dieſe beyden verſchiedenen Arten in die Summe fallen.

7. §.

Die Schwere theilt jeder frey herab fallenden Masse in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten mit, und das Stück des Weges, durch welchen die Masse im folgenden Zeittheilchen weiter rückt, als allein wegen der Trägheit geschehen wäre, ist allemal eben so groß, als es im vorhergehenden eben so grossen Zeittheilchen war. In diesem Stück ist nicht jede andre bewegende Kraft der Schwere ähnlich. Es giebt Kräfte, die der bewegten Masse im zweyten Zeittheilchen mehr oder weniger Geschwindigkeit als im ersten eben so grossen Zeittheilchen mittheilen. Diese heißen **ungleichförmig wirkende oder veränderliche Kräfte**, so wie im Gegentheil die Schwere nach der galiläischen Hypothese eine **beständige, oder gleichförmig beschleunigende Kraft** ist.

8. §.

Wenn nun eine andre Kraft V, wie die Schwere eine Masse gleichförmig beschleuniget, so wird die Bewegung dieser Masse nach völlig ähnlichen Gesetzen, wie die Bewegung frey fallender schwerer Körper erfolgen; nur mit dem Unterschied, daß die Kraft V ihrer Masse in einer gewissen Zeit, z. E. einer Secunde eine größere oder kleinere Geschwindigkeit mittheilt, als ihr die natürliche Schwere in eben der Zeit mittheilen würde. Man nehme für diese Zeit eine Secunde an, eine schwere Masse falle in der ersten Secunde von der Höhe g, und erlange die Geschwindigkeit k, in der Zeit t aber die Geschwindigkeit c. Eine eben so grosse Masse aber gehe von der Kraft V getrieben durch den Weg G in der ersten Secunde fort, und erlange die Geschwindigkeit K, in der Zeit t aber die Geschwindigkeit C; so ist $c = kt = 2gt$, und $C = Kt = 2Gt$. Nun verhalten sich die

Be-

Beſchleunigungen zwoer Kräfte ohne Zweifel wie die Geſchwindigkeiten, die ſie gleichen Maſſen in gleichen Zeiten mittheilen. Wenn demnach die Beſchleunigung der Schwere $= \alpha$, die Beſchleunigung der Kraft V aber $= A$ iſt, ſo hat man $\alpha : A = 2gt : 2Gt = g : G$, weil t einerley iſt. Sind nun s und S die Wege, welche die Maſſe entweder von der Schwere oder der Kraft V getrieben in der Zeit t durchläuft; ſo iſt $s = gtt$, $S = Gtt$, alſo auch $s : S = g : G$. **Daher verhalten ſich die Beſchleunigungen der Schwere und der Kraft V, wie die Wege, durch welche einerley Maſſe entweder von der Schwere, oder der Kraft V getrieben, in einerley Zeit fortrücken würde.**

9. §.

Dieſe Vergleichung der Beſchleunigungen zwoer Kräfte hat ſehr viele Aehnlichkeit mit der Vergleichung der Geſchwindigkeiten zwoer Maſſen, die ſich gleichförmig bewegen. Man hat von der Beſchleunigung einer bewegenden Kraft einen beſtimmten Begrif, wenn man weis, wie weit eine gegebene Maſſe wegen der Wirkung dieſer Kraft in einer beſtimmten Zeit, z. E. einer Secunde fortrückt. Dieſer zurückgelegte Weg iſt eigentlich die Beſchleunigung ſelbſt nicht. Allein wenn die Acceleration einer ſolchen Kraft $= 1$ geſetzt wird, vermöge welcher eine Maſſe in der erſten Secunde einen Fuß fortgetrieben wird; ſo wird die Acceleration einer andern Kraft 2mal, 3mal größer ſeyn, u. ſ. f. welche dieſelbe Maſſe in einer Secunde 2 Fuß, 3 Fuß weit forttreibt. Deswegen werde ich hier durch die Beſchleunigung einer Kraft V, die eine gegebene Maſſe wie die Schwere gleichförmig beſchleuniget, den Weg verſtehen, durch welchen dieſe Maſſe, wegen Wirkung der Kraft V in einer Secunde fortrückt.

Wenn also G die Beschleunigung ist, und s der in der Zeit t von der Masse zurück gelegte Weg, so hat man $G = \frac{s}{tt}$.

10. §.

Dafern die Bewegung einer Masse A, worauf die Kraft V wirkt, von einem Widerstande gehemmet wird, so wird die Kraft V diese Masse gegen den Widerstand auf eine ähnliche Art pressen, wie die Schwere diese Masse gegen einen solchen Widerstand pressen würde. Dieser Druck sey nun so stark als er wolle, so wird man ihn doch allemal mit einem gewissen Gewicht vergleichen können, d. i. mit dem Druck einer gewissen schweren Masse, die auf einer horizontalen Tafel ruhig liegt. Es wird sich ein Gewicht angeben lassen, das die Tafel eben so stark preßt.

11. §.

Eine Kraft V treibt die Masse A nach der Richtung Aβ, und eine andre Kraft W treibt eben die Masse A zugleich nach der grade entgegen gesetzten Richtung Aα. Wenn nun die Beschleunigungen beyder Kräfte gleich sind, so bleibt die Masse A in Ruhe. Denn beyde Kräfte würden der Masse A in gleichen Zeiten gleiche und entgegen gesetzte Geschwindigkeiten mittheilen, also kann A gar nicht in Bewegung kommen.

Dafern also zwo Kräfte gleiche Massen gleich stark beschleunigen, so werden sie diese Massen gegen einen Widerstand, der die Bewegung gleich im Anfang hemmet, gleich stark pressen. Der Widerstand thut dasselbe, was jede dieser Kräfte thun würde, wenn sie der andern entgegen gesetzt wäre. Es ist aber offenbar, daß diese Kräfte gegen einander gleich stark drücken.

12. §.

Ungleiche Maſſen werden von der Schwere gegen einen Widerſtand ungleich ſtark gepreßt, und zwar ſo, daß der Druck den Maſſen proportional iſt, ob ſie gleich bey wirklich erfolgter Bewegung in gleichen Zeiten gleiche Geſchwindigkeiten erlangen. Auch dies gilt allgemeiner von jeder Kraft, die gleiche Maſſen gleich ſtark beſchleuniget. **Wenn auf ungleiche Maſſen ſolche Kräfte wirken, und die Bewegung durch einen Widerſtand gehemmet wird, ſo verhalten ſich die Preſſungen, wie die Maſſen.** Dieſe ungleichen Maſſen aber, wenn ſie nicht gehindert werden, erlangen in gleichen Zeiten gleiche Geſchwindigkeiten.

13. §.

Wenn die Beſchleunigungen der Kräfte V und W nach den Richtungen A a und A α im 11. §. nicht gleich ſind, wenn V der Maſſe A in einer Secunde oder jeder andern Zeit eine größere Geſchwindigkeit mittheilt, als W eben der Maſſe in eben der Zeit mitzutheilen vermögend iſt, ſo kann A nicht in Ruhe bleiben. Die Kraft W vermindert nur die von V gewirkte Geſchwindigkeit, und die Maſſe A erlangt in jedem Augenblick eine Geſchwindigkeit, die ſo groß iſt, als der Ueberſchuß der größern Geſchwindigkeit über die kleinere.

Dieſe Kräfte alſo werden die Maſſe A ungleich ſtark preſſen. Und hieraus folgt, wie im 11 §., **wenn zwo Kräfte gleiche Maſſen ungleich ſtark beſchleunigen, ſo preſſen ſie dieſe Maſſen gegen einen Widerſtand, der die Bewegung hemmet, ungleich ſtark, und zwar diejenige ſtärker, welche ſtärker beſchleuniget.**

14. §.

Wenn demnach die Maſſe A von zwoen Kräften nach entgegen geſetzten Richtungen getrieben wird, und die Maſſe bleibt in Ruhe; oder welches einerley iſt: wenn zwo Kräfte die Maſſe A nach entgegen geſetzten Richtungen gleich ſtark drücken, ſo ſind die Accelerationen beyder Kräfte gleich groß, d. i. die Geſchwindigkeiten würden gleich ſeyn, die jede Kraft für ſich dieſer Maſſe in einerley Zeit mittheilen würde: auch würden die Räume gleich ſeyn, durch welche die Maſſe A in einerley Zeit entweder nach der einen oder der andern Richtung fortgehen würde.

Es fließt hieraus die fernere Folge: wenn zwo Kräfte gleiche Maſſen gleich ſtark gegen einen Widerſtand preſſen, ſo theilen ſie dieſen Maſſen gleiche Accelerationen mit, wenn der Widerſtand gehoben wird.

Wenn aber zwo Kräfte gleiche Maſſen ungleich ſtark drücken, ſo wird der ſtärkere Druck ſtärker, der ſchwächere weniger beſchleunigen.

15. §.

Der Satz des 12. §. iſt auch umgekehrt wahr. Wenn zwo Maſſen ungleich ſind, auf beyde aber ſolche Kräfte drücken, die den Maſſen proportional ſind, ſo daß gleiche Theilchen dieſer Maſſen gleiche Preſſungen leiden, ſo erlangen dieſe Maſſen, wenn ſie nicht gehindert werden, in gleichen Zeiten gleiche Geſchwindigkeiten.

16. §.

Es ſey DE eine ebene horizontale Tafel, auf derſelben liegt die Maſſe A, und ihr Gewicht iſt = P. Würde die Tafel plötz-

lich

lich weggenommen, ſo würde A in der erſten Secunde um die Tiefe $Aa = g = 15,625$ Rh. Fuß ſinken, und in a die Geſchwindigkeit $k = 2g$ erlangt haben. Es ſey B eine andre Maſſe ohne Schwere, die der Maſſe A gleich iſt. Eine Kraft V drücke dieſe Maſſe ebenfalls ſenkrecht gegen DE, ſo muß B gleichfalls vertical herunter ſinken, wenn DE weggenommen wird. Wenn nun V die Maſſe B gleichförmig beſchleuniget, B aber am Ende der erſten Secunde bis b kömmt, und daſelbſt die Geſchwindigkeit $c = 2k$ erlangt, ſo iſt $Bb = 2Aa$ (8. §.) $= 2g$. Aber in eben dieſem Fall iſt auch $V = 2P$. Dies letztere will ſo viel ſagen: So lange die horizontale Tafel *DE* die Bewegung hemmet, wird *V* die Maſſe *B* gegen *DE* doppelt ſo ſtark drücken, als die natürliche Schwere eine eben ſo groſſe Maſſe A gegen gegen *DE* drückt.

Beweis. Ein Druck, der $= P$ wäre, aber A nach entgegen geſetzter Richtung $A\alpha$ preßte, würde A in Ruhe erhalten. Aber ein Druck $= P$, der B nach entgegen geſetzter Richtung $B\beta$ preßt, hält B nicht in Ruhe. Er würde der Maſſe B in der Zeit t die Geſchwindigkeit $c - k$ (13. §.) $= k$ mittheilen. Nun wird B gegen DE mit einer Kraft $= V - P$ gepreßt, und es iſt ſoviel, als wenn B das Gewicht $V - P$ hätte. Weil dieſer Druck der Maſſe B in der Zeit t nach gehobenem Widerſtande die Geſchwindigkeit k, und P einer eben ſo groſſen Maſſe A in eben der Zeit eben die Geſchwindigkeit mittheilt; ſo iſt $V - P = P$, (11. §.) folglich $V = 2P$.

17. §.

Wenn die übrigen Vorausſetzungen bleiben, aber *B* am Ende der erſten Secunde die Geſchwindigkeit $3k$ erlangte, ſo iſt $V = 3P$.

Be-

Beweis. Ein Druck = P, der die Masse B nach entgegen gesetzter Richtung B β treibt, vermindert wie vorhin den Druck V, so daß B nach B *b* nur mit der Gewalt V — P gepreßt wird. Eben die Masse B aber erlangt in der Zeit *t* die Geschwindigkeit $3k - k$ (13. §.) $= 2k$, also ist V — P = 2P (16. §.) und V = 3P.

18. §.

Man siehet leicht, daß aus diesem Satz wieder folge, wenn B am Ende der ersten Secunde die Geschwindigkeit 4 *k* erlangt, daß V = 4 P seyn müßte. Ueberhaupt aber erhellet daraus die Richtigkeit dieses Satzes: Dafern *V* = *n P* seyn muß, wenn *B* von *V* getrieben die Geschwindigkeit *n k* erlangte; so muß *V* = (*n* + 1) P seyn, wenn *B* die Geschwindigkeit (*n* + 1) *k* in einer Secunde erlangen würde.

Es ist also allgemein wahr: wenn V der Masse B in der ersten Secunde die Geschwindigkeit *n k* mittheilt; so ist V = *n* P, oder, wenn der Kraft V Beschleunigung = *n g* ist, so ist V = *n* P.

19. §.

Wenn eine Kraft *V* die Masse *B* gleichförmig beschleuniget, und das Gewicht einer schweren eben so grossen Masse *A* ist = *P*; so verhält sich *V*: *P* wie die Beschleunigung der Kraft *V* zur Beschleunigung der Schwere.

Beweis. Die Beschleunigung der Schwere sey, wie bisher, = *g* und die Beschleunigung der Kraft V sey = G. Verhält sich nun G: *g* = *m*: *n*, so daß *m* und *n* ein paar ganze Zahlen sind, so ist *m g* = *n* G. Wenn aber eine Kraft X eine Masse = A bewegt, und ihre Beschleunigung = *m g* ist, so ist X = *m* P

(18. §.)

18. §.) Und wenn eine Kraft Y eine eben ſo groſſe Maſſe B bewegt, ihre Beſchleunigung aber $= n$ G iſt; ſo iſt $Y = n V$. (18. §.) Da nun $mg = nG$ war, ſo wird $X = Y$ (11. §.) folglich $mP = nV$, und $V : P = m : n$, oder $V : P = G : g$. So erhellet die Richtigkeit des Satzes, wenn das Verhältniß $G : g$ ein Rationalverhältniß iſt. Daraus läßt ſich aber leicht ſchließen, daß eben daſſelbe noch wahr ſeyn müſſe, wenn gleich $G : g$ ein Irrationalverhältniß wäre.

Es ſey $G : g > m : n$ und $G : g < m + 1 : n$, ſo werden ſich dieſe Gränzen, zwiſchen welchen das Verhältniß $G : g$ fällt, nach Gefallen verengern laſſen. Nun mag man dieſe Gränzen einander ſo nahe rücken, als man will, ſo wird allemal das Verhältniß $V : P$ zwiſchen eben den Gränzen enthalten ſeyn. Iſt nämlich $G > \frac{m}{n} g$ und $G < \frac{m+1}{n} g$, ſo iſt zugleich $V > \frac{m}{n} P$ und $V < \frac{m+1}{n} P$, wie groß auch m und n genommen werden. Denn vermöge des geführten Beweiſes ſind $\frac{m}{n} g$ uud $\frac{m+1}{n} g$ die Beſchleunigungen der Kräfte $\frac{m}{n} P$ und $\frac{m+1}{n} P$. Wäre aber einmal $V < \frac{m}{n} P$, ſo wäre $G < \frac{m}{n} g$, und wenn einmal $V > \frac{m+1}{n} P$ wäre, ſo müßte $G > \frac{m+1}{n} g$ ſeyn (14. §.) beydes gegen die Vorausſetzung. Alſo iſt auch in dieſem Fall $G : g = V : P$.

20. §.

Die Proportion $V : P = G : g$ läßt ſich auch ſo ausdrücken $\frac{V}{P} : 1 = G : g$. Wenn man demnach die Beſchleunigung

der Schwere als die Einheit betrachtet, und mit derselben die Beschleunigung einer jeden andern Kraft vergleicht, so kann man $G = \frac{V}{P}$ setzen, und dies giebt die gewöhnliche Regel.

Man findet die Beschleunigung einer Kraft *V*, welche die Masse *B* bewegt, wenn man diese Kraft durch das Gewicht einer Masse, die eben so groß als *B* ist, dividirt.

Dieser Quotient giebt also nicht eigentlich die Beschleunigung der Kraft V in dem Verstande des 9. §, er drückt vielmehr nur aus, wieviel mal die Beschleunigung der Kraft V größer oder kleiner als die Beschleunigung der Schwere sey.

Weil die Massen verschiedener Körper sich wie ihre Gewichte verhalten, und man die Größe der Masse eines Körpers nicht anders als dadurch ausdrücken kann, daß man anzeigt, wie groß sein Gewicht nahe an der Erdfläche seyn würde; so drückt man die erwiesene Regel auch auf die Art aus: *man müße die Stärke des Drucks V durch die Masse B dividiren.* Man kann der Kürze wegen diese Sprache beybehalten, in der That aber muß nothwendig das Gewicht der Masse B verstanden werden; und wenn man die Größe der Masse B auf andre Art als durch ihr Gewicht ausdrücken könnte, und wirklich ausdrückte, so würde $\frac{V}{B}$ die Beschleunigung der Kraft V nicht ausdrücken, es wäre denn, daß man statt V ebenfalls eine Masse setzte, die das natürliche Gewicht V hätte. Wenn V durch ein eben so grosses Gewicht P ausgedrückt ist, und M das Gewicht der Masse B an der Oberfläche der Erde seyn würde, so ist bekannt, daß P die absolute Größe der bewegenden Kraft V, und $\frac{P}{M}$ ihre Beschleunigungsgröße genannt werde.

21. §.

21. §.

Die abſolute Größe der beſtändigen Kraft P iſt gegeben, welche die Maſſe M treibt, man ſucht die Größe des Weges s, welchen M in der Zeit t zurück leget, nebſt ihrer Geſchwindigkeit c nach verfloſſener Zeit t.

Aufl. Wenn G die Beſchleunigung der Kraft P iſt, ſo hat man $s = Gtt$, (9. §.) und $G = \frac{gP}{M}$ (20. §.) alſo $s = \frac{gP}{M} tt$.

Ferner iſt $c = 2Gt = \frac{2gP}{M} t$.

Ungleichförmig beſchleunigende Kräfte.

22. §.

Es ſey die Maſſe M, welche die veränderliche Kraft P treibt, in der Zeit t durch den Weg AP fortgegangen, und rücke in dem folgenden Zeittheilchen T um das Stück $P\pi$ weiter. Dafern nun die Kraft P in dem Augenblick, da die Maſſe M in P ankömmt, überall aufhörte zu wirken, ſo würde dennoch die Maſſe M einen Theil PQ dieſes Weges mit der in P ſchon erlangten Geſchwindigkeit gleichförmig durchlaufen haben, und es iſt $Q\pi$ eigentlich der Weg, den die Maſſe wegen fortdaurender Wirkung der Kraft in der Zeit T noch zurück leget. Wäre die Kraft P während der ganzen Zeit T von eben der Größe geblieben, die ſie im Anfang der Zeit T, oder am Ende der Zeit t hatte, ſo wäre die Maſſe M in dieſer Zeit zwar weiter als Q bis p vorgerückt, und dann wäre $\frac{Qp}{TT}$ ihre Beſchleunigung in dem Verſtande des 9. §. Allein es

ist nun Qp nicht mit $Q\pi$ einerley, weil sich P während der Zeit T verändert hat. Dafern die Kraft P in der Zeit T gröſser geworden ist, so ist $Q\pi > Qp$, widrigenfalls aber $Q\pi < Qp$. So wie nun bey der ungleichförmigen Bewegung durch die Geschwindigkeit des bewegten Körpers für einen gegebenen Zeitpunct derjenige Weg verstanden wird, den die Masse in der folgenden Secunde durchlaufen würde, wenn die Bewegung von jetzt an sich nicht weiter änderte, und von diesem Augenblick an der Körper bloſs vermöge seiner Trägheit fortgienge; so soll hier durch die **Beschleunigung einer veränderlichen Kraft** P für einen gegebenen Zeitpunct derjenige Weg verstanden werden, durch welchen die Masse in der folgenden Secunde weiter als wegen der Trägheit allein fortrücken würde, wenn während dieser Zeitsecunde die Kraft P eben so groſs bliebe, als sie im Anfang derselben war. In diesem Verstande wäre also $\frac{Qp}{TT}$ die Beschleunigung der veränderlichen Kraft P für den letzten Augenblick der Zeit t.

23. §.

Es ist eine Gleichung zwischen t und s gegeben, wenn s den Weg bedeutet, den die Masse M, die von der veränderlichen Kraft P getrieben wird, in der Zeit t zurück leget: man sucht die Geschwindigkeit der Masse M nebst der Beschleunigung der Kraft P für jede gegebene Zeit t.

Aufl. Es sey $AP = s$ der in der Zeit t zurück gelegte Weg, und in dem folgenden Zeittheilchen $\mathbb{Q}\, t$ sey M von P nach π gerückt, so ist s um das Stück $P\pi = \triangle s$ angewachsen, indem die Zeit t um $\triangle t$ gröſser geworden ist. Die in P erlangte Geschwindigkeit sey $= c$, und die in π erlangte Geschwindigkeit $= c'$ so ist $c' > c$. Wenn nun PQ der Weg ist, den die Masse M in der Zeit

Zeit $\triangle t$ mit der Geſchwindigkeit c gleichförmig zurück legen würde, ſo iſt $c = \frac{PQ}{\triangle t}$. Aber $PQ < P\pi$ alſo iſt $c < \frac{\triangle s}{\triangle t}$. Hätte die Maſſe M in P ſchon die Geſchwindigkeit c' und wäre in der Zeit t von P nach q gleichförmig fortgegangen, ſo müßte $Pq > P\pi$ ſeyn, und es wäre $c' = \frac{Pq}{\triangle t}$, alſo $c' > \frac{\triangle s}{\triangle t}$. Zwiſchen dieſen Gränzen c und c' iſt alſo $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ allemal enthalten, wie klein auch $\triangle t$ genommen wird. Beyde Gränzen nähern ſich einander deſto mehr, je mehr $\triangle t$ abnimmt, und werden gleich groß, wenn $\triangle t$ verſchwindet. Folglich wird $c = \frac{ds}{dt}$.

In dem Augenblick, da die Maſſe M in P ankömmt, ſey die Kraft, welche dieſe Maſſe beſchleuniget, $= P$, und weil ſich dieſe Kraft, während der Zeit $\triangle t$ ändert, ſo ſey ſie $= P$ am Ende der Zeit $\triangle t$, in dem Augenblick, da M in π ankömmt. Wenn nun dieſe Kraft während der Zeit $\triangle t$ keine Aenderung litte, ſo würde die Geſchwindigkeit c in der Zeit $\triangle t$ um das Stück $\frac{2gP}{M}\triangle t$ wachſen (21. §.). Nimmt man aber an, daß P während der Zeit $\triangle t$ wächſt, alſo $P' > P$ iſt, ſo erhellet, daß $\frac{2gP}{M}\triangle t$ kleiner ſey, als dasjenige Stück, um welches c in der Zeit $\triangle t$ wächſt. Wird nun c' aus c, indem $t + \triangle t$ aus t wird, ſo iſt $c' - c = \triangle c$ eigentlich dasjenige, um welches c während der Zeit $\triangle t$ gröſſer wird, und es iſt $\triangle c > \frac{2gP}{M}\triangle t$, oder $\frac{\triangle c}{\triangle t} > \frac{2gP}{M}$.

Wäre die bewegende Kraft im Anfange der Zeit $\triangle t$ ſchon $= P'$ geweſen, und hätte ſich während dieſer Zeit $\triangle t$ nicht geändert, ſo

wäre c um das Stück $\frac{2gP'}{M}\Delta t$ gewachsen, und es erhellet, wie vorhin, daß $\Delta c < \frac{2gP'}{M}\Delta t$ oder $\frac{\Delta c}{\Delta t} < \frac{2gP'}{M}$ sey. Beyde Gränzen, zwischen welchen das Verhältniß $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ fällt, nähern sich einander, wenn Δt abnimmt, und gehen zusammen, wenn Δt verschwindet. Daher ist des Verhältnisses $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ Gränze $\frac{dc}{dt} = \frac{2gP}{M}$, und die gesuchte Beschleunigung $\frac{P}{M} = \frac{dc}{2gdt}$.

Wenn $P' < P$ wäre, also P während der Zeit Δt abnehme, so würde sich in diesen Schlüssen nichts weiter als der Umstand ändern, daß $\Delta c < \frac{2gP}{M}\Delta t$ und $\Delta c > \frac{2gP'}{M}\Delta t$ seyn müßte. Uebrigens würde daraus eben so wie vorhin $\frac{dc}{dt} = \frac{2gP}{M}$ folgen.

Vom Maas der Kräfte.

24. §.

Wenn es wahr ist, daß auf die Gleichungen des 21 und 23 §. die ganze Mechanik beruhet, so muß auch die Frage, **wie ein paar bewegende Kräfte sich gegen einander verhalten?** aus den bisher vorgetragenen Gründen zulänglich beantwortet werden können. Sind die Kräfte veränderlich, so kann man nur fragen, wie sie sich für einen gegebenen Zeitpunct gegen einander verhalten, und denn ist es eben soviel, als wenn man ein paar beständige Kräfte mit einander vergleicht, so daß die ganze

Ver-

Vergleichung aus dem 21. §. folgt. Es iſt ſoviel, als ob man ſagt, wie ſtark die Kräfte in dieſem Augenblick die bewegte Maſſe gegen einen Widerſtand, der von jetzt an die Bewegung hemmte, preſſen würden, wenn der Maſſe in eben dem Augenblick die ſchon erlangte Geſchwindigkeit genommen wäre. Dieſe Preſſungen verhalten ſich, wie die Bewegungen, ſo die Kräfte ihren Maſſen in gleichen Zeiten mittheilen würden. Weil nämlich $Mc = 2gPt$, ſo verhält ſich P wie Mc, wenn t einerley iſt, und ich ſehe nicht ab, daß man einer weitern Vergleichung bewegender Kräfte in der Mechanik bedürfe. Der bekannte ehedem über das Maas der Kräfte ſo hitzig geführte Streit hat auf die Wiſſenſchaft ſelbſt nach ihrem gegenwärtigen Zuſtande ſo wenig Einfluß, daß ich kein Wort davon erwähnen würde, wenn nicht bisher noch faſt in allen Handbüchern der Mechanik und Phyſik die Sache berührt würde. Eben daher werde ich mich auch in keine weitläuftige Prüfung der gegenſeitigen Gründe einlaſſen, ſondern nur einige allgemeine Erinnerungen beyfügen, die der Sache vieleicht mehr Licht geben werden, als ich bey den meiſten hieher gehörigen Schriftſtellern finde.

25. §.

Weil ein jeder bewegter Körper eine Urſache neuer Bewegungen andrer Körper werden, und ihre Bewegungen auf mancherley Art verändern kann; ſo hat man faſt beſtändig dieſe Sache ſo betrachtet, als wenn demſelben eine beſondere Kraft eigen wäre. Man hielt davor, dieſe Kraft des Körpers ſey deſto gröſſer, je gröſſer ſeine Maſſe und Geſchwindigkeit iſt, und ſetzte daher feſt, daß die Kräfte ſolcher Körper ſich wie die Producte der Maſſen in ihre Geſchwindigkeiten verhalten müſſen. Man verglich alſo die ſogenannten Kräfte zweener Körper deren Maſſen

M,

M, *m*, und Geſchwindigkeiten C, *c*, ſind ſo, wie nach aller Geſtändniß ihre Bewegungen verglichen werden müſſen, und ſetzt das Verhältniß dieſer Kräfte = MC : *mc*.

26. §.

Hiebey iſt nun gleich anfangs zu bemerken, daß man ſchwerlich deutlich werde anzugeben wiſſen, was das Wort Kraft hier recht heißen ſolle. Sieht man die Geſchwindigkeiten C, *c*, womit die Maſſen M, *m*, jetzt fortgehen, als ſolche an, die von bewegenden Kräften in gleichen Zeiten den Maſſen mitgetheilt ſind, ſo hat es ſeine Richtigkeit, daß dieſe bewegenden Kräfte ſich wie MC : *mc* verhalten. Allein dies ſind alsdenn nicht Kräfte der bewegten Maſſen, ſie müſſen wenigſtens in Gedanken davon unterſchieden, und die Maſſen als der leidende Theil betrachtet werden. Man wird antworten: eben dadurch, daß die Maſſe in Bewegung geſetzt worden, ſey ihr auch eine Kraft mitgetheilt, und dieſe in der Maſſe nun hervorgebrachte Kraft ſey dem MC proportional. In der That aber gründet ſich dieſe Vorſtellung auf einen ganz verwirrten Begrif deſſen, was in der Mechanik eigentlich Kraft heiſſen ſoll. Sie iſt von Redensarten des gemeinen Lebens hergenommen, die nicht allemal der Sache ſelbſt genau angemeſſen ſind. Vermöge der ſonſt allgemein angenommenen erſten Grundſätze der Mechanik kann man einer Maſſe, die mit der Geſchwindigkeit C gleichförmig fortgehet, ſo wenig eine eigentlich ſogenannte bewegende Kraft zuſchreibeu, ſo wenig man ſie der ruhenden Maſſe beylegt. Will man aber der bewegten Maſſe deßwegen eine Kraft zuſchreiben, die noch in etwas anders, als in der bloſſen Trägheit beſtehen ſoll, weil ſie den Zuſtand der Bewegung andrer Körper ändern kann, ſo muß man aus eben der Urſache der ruhenden Maſſe gleichfalls eine Kraft beylegen.

Denn

enn die ruhende Maſſe kann ſo gut den Zuſtand der Bewegung
rer Maſſen ändern, als es die bewegte thun kann. Zwar re-
man im gemeinen Leben ſo, die bewegte Maſſe M ſtoſſe die
ende N fort, oder M ſetze N in Bewegung: allein wenn man
Sache nach richtigen Begriffen beurtheilen will, ſo muß man
gen dieſer Redensarten nicht in der Maſſe M allein die Urſache
in N hervorgebrachten Bewegung ſuchen, ſondern vielmehr
beyden zugleich, weil beyde undurchdringlich ſind. Und wa-
s ſoll denn die ruhende Maſſe N nicht auch eine Kraft haben,
ſie doch die Bewegung der Maſſe M verändert, und eben das,
s die Schwere thut, wenn ein Körper aufwärts geworfen wird.
äre N, wie der geometriſche Raum durchdringlich, ſo wäre
nicht in Bewegung gekommen, und M hätte ſeine Bewegung
geändert behalten. H. Euler macht in den Memoires de Ber-
A. 1745. p. 21. u. f. eben dieſe Erinnerungen.

27. §.

Wer inzwiſchen MC bewegende Kraft nennen will, der
ſeine Freyheit, er nennt das bewegende Kraft, was eigent-
Bewegung heißen ſollte. Man hätte vielleicht dieſe Redens-
, wie manche andre ebenfalls nicht ſo ganz genau richtige, in
Mechanik beybehalten, wenn nicht der H. v. Leibnitz darauf
fallen wäre, dieſe ſogenannten bewegende Kräfte auf eine an-
Art zu vergleichen, die ſich aber doch noch immer auf die Vor-
lung gründet, als ob man einem bewegten Körper vorzüglich
e bewegende Kraft zuſchreiben müſſe, die ein ruhender nicht hat.
an weis, daß nach ſeiner Lehre das Verhältniß der Kräfte
eener bewegter Körper $= MC^2 : mc^2$ ſeyn ſoll, und ſein Be-
is, womit er in den A. E. des Jahrs 1686. dies zu beſtättigen
hte, iſt bekannt. Er ſieht die Höhen, auf welche vertical auf-
rts geworfene Körper ſteigen, als die Wirkungen, und die

bewegten Körper als die Urſachen dieſes Steigens auf eine gewiſſe Höhe an. Bey gleichen Maſſen ſollen ſich die Kräfte der Körper wie dieſe Höhen, und bey gleichen Höhen, wie die Maſſen verhalten, da es denn ſeine Richtigkeit hat, daß die Höhen, auf welche die Maſſen ſteigen, den Quadraten der Geſchwindigkeiten proportional ſind, womit ſie zu ſteigen anfangen. Allein es iſt nicht abzuſehen, warum der Körper deßwegen, weil er dieſe oder jene Höhe erreicht, eine ihm eigene Kraft beſitzen ſoll. Der Körper ſteigt vermöge ſeiner Trägheit, ſo wie ein ruhender Körper vermöge ſeiner Trägheit ruhet, und außerdem iſt ſo wenig in dem bewegten, als in dem ruhenden Körper etwas, daß den Namen einer Kraft verdiente.

28. §.

Wenn dieſe Erinnerungen ihre Richtigkeit haben, ſo iſt die leibnitziſche Eintheilung der Kräfte in todte und lebendige A. E. Apr. 1695. p. 149. ganz unverſtändlich. Körper, die bloß drücken, wie Gewichte, die unterſtützt ſind, geſpannte Federn, u. ſ. w. ſollen eine todte Kraft, bewegte Körper eine lebendige Kraft beſitzen, da denn ſeine Vergleichung von den letztern eigentlich gelten ſoll. Allein ein bloß drückender ſchwerer Körper drückt ja nach den ſonſt allgemein angenommenen Begriffen nicht ſelbſt, ſondern das was drückt, muß wenigſtens in Gedanken von dem Körper unterſchieden werden. Es iſt wenigſtens etwas anders, als was man ſonſt Trägheit nennt. Fällt das Hinderniß weg, was den Druck aufhält, ſo iſt wiederum der Körper nicht ſelbſt dasjenige, was ihn bewegt. Eben das, was vorhin drückte, iſt zugleich dasjenige, was den Körper nun bewegt. Hört dies einmal auf, den Körper weiter zu beſchleunigen, ſo behält zwar der Körper die letzte Geſchwindigkeit, und geht damit vermöge ſeiner Trägheit gleichförmig fort. Allein man muß nun billig

weiter fragen, was denn überdem in den Körper hinein gekommen ſey, das den Namen einer lebendigen Kraft verdiene? Soll es das Vermögen ſeyn, den Zuſtand eines andern Körpers zu ändern, ſo hat dies der ruhende Körper auch, und es iſt dem bewegten nicht allein eigen.

29. §.

Soll die Eintheilung der Kräfte in todte und lebendige noch einigermaſſen verſtändlich ſeyn, ſo wäre am natürlichſten zu glauben, daß Leibniz durch die lebendige Kraft eine wirkſame und thätige Kraft, etwas, das wirklich Bewegungen verurſacht, verſtanden wiſſen wolle; oder recht metaphyſiſch zu reden: eine vim agentem, in actu ſecundo conſtitutam, und daß todte Kraft ſoviel heißen ſolle, als vis non agens, vis in actu primo conſtituta. Faſt alle Schriftſteller, ſie mögen für oder wider Leibnitzen geſchrieben haben, erklären ſich auch über dieſe Eintheilung ſo, und ich muß geſtehen, daß, wie mir deucht, die eigene Leibnitziſche Erklärung im Specim. Dyn. a. a. O. p. 149. nicht wohl anders verſtanden werden könne. Indeſſen erklärt ſich doch Joh. Bernoulli, der eifrigſte Vertheidiger des H. v. Leibniz, darüber ganz anders. Er verſtehet durch lebendige Kraft ein bloſſes Vermögen zu handeln, folglich eine vim non agentem, in actu primo conſtitutam. Dies ſagt Bernoulli, ſelbſt in der Diſſ. de vera notione virium vivarum §. III. Oper. T. III. p. 240. wenn er ſich ſo ausdrückt: Hinc patet, vim *vivam* (quæ aptius vocaretur *facultas agendi*, Gallice *le pouvoir*) eſſe aliquid reale &c. und eben daſelbſt im 1. §. vis viva non conſiſtit in actuali exercitio, ſed in *facultate agendi*. Dieſe Erklärung giebt der Streitfrage einen ganz andern Sinn, als die meiſten Schriftſteller zum Grunde ſetzen. Hat Bernoulli die eigentliche Meinung des H. v. Leibniz getroffen, ſo

hätte Leibniz nicht ſagen ſollen: vis mortua *eſt* ſollicitatio ad motum, ſondern vielmehr ſo, ſollicitatio ad motum gignit vim mortuam, und von der vi viva hätte es heißen müſſen: eſt vis cum motu actuali genita. Die todte Kraft iſt nun eigentlich gar keine oder vielleicht beſſer mit Leibniz und Bernoulli zu reden, ein unendlich kleines Vermögen den Zuſtand andrer Körper zu ändern. Es iſt nicht mit dem Druck einerley, ſondern es iſt etwas, das der Druck als einen Effect hervorbringt. Wenn nun Leibniz ferner ſagt: vis eſt viva ex infinitis vis mortuæ impreſſionibus nata, ſo muß man dieſe Worte ſo verſtehen: wenn nach gehobenem Hinderniß das, was vorhin drückte, z. E. die Schwere, eine Maſſe wirklich bewegt, ſo ſetzt die Schwere in jedem folgenden Augenblick in die Maſſe ein neues unendlich kleines Vermögen hinein, welches denn in endlicher Zeit ein endliches Vermögen, d. i. die vim vivam erzeuget. Druck und vis mortua ſind hier alſo wie Urſache und Effect unterſchieden. Daher hätte Leibniz, ſeinem eigenen Sinn gemäſſer ſeine Worte ſo faſſen müſſen: vis eſt viva ex infinitis viribus mortuis impreſſis nata. Ich glaube, daß dieſe Vorſtellung wenigſtens den Begriffen völlig gemäß ſey, die Joh. Bernoulli von der Sache hatte. Er ſagt im Diſcours ſur le mouvement Chap. III. Def. II. la *force morte* eſt celle, que reçoit un corps ſans mouvement, lorqu' il eſt ſollicité & preſſé de ſe mouvoir &c. Oper. T. III. p. 23. Alſo iſt die preſſion die Urſache, und die force morte die Wirkung. Das ſchlimſte iſt, daß Bernoulli ſo wenig als andre bey einerley Art ſich zu erklären geblieben ſind. In der Abhandlung de vera notione vir. viv. §. IV. redet er wieder ſo, als wenn vis mortua und preſſio völlig einerley ſeyn ſoll. Doch die Schriftſteller, welche auf dieſen Unterſcheid ſo ſehr dringen, mögen es ſelbſt ausmachen, was die vis mortua eigentlich ſeyn ſolle. Soviel iſt gewiß: nach der Bernoulliſchen Erklärung der vis vivæ

heißt

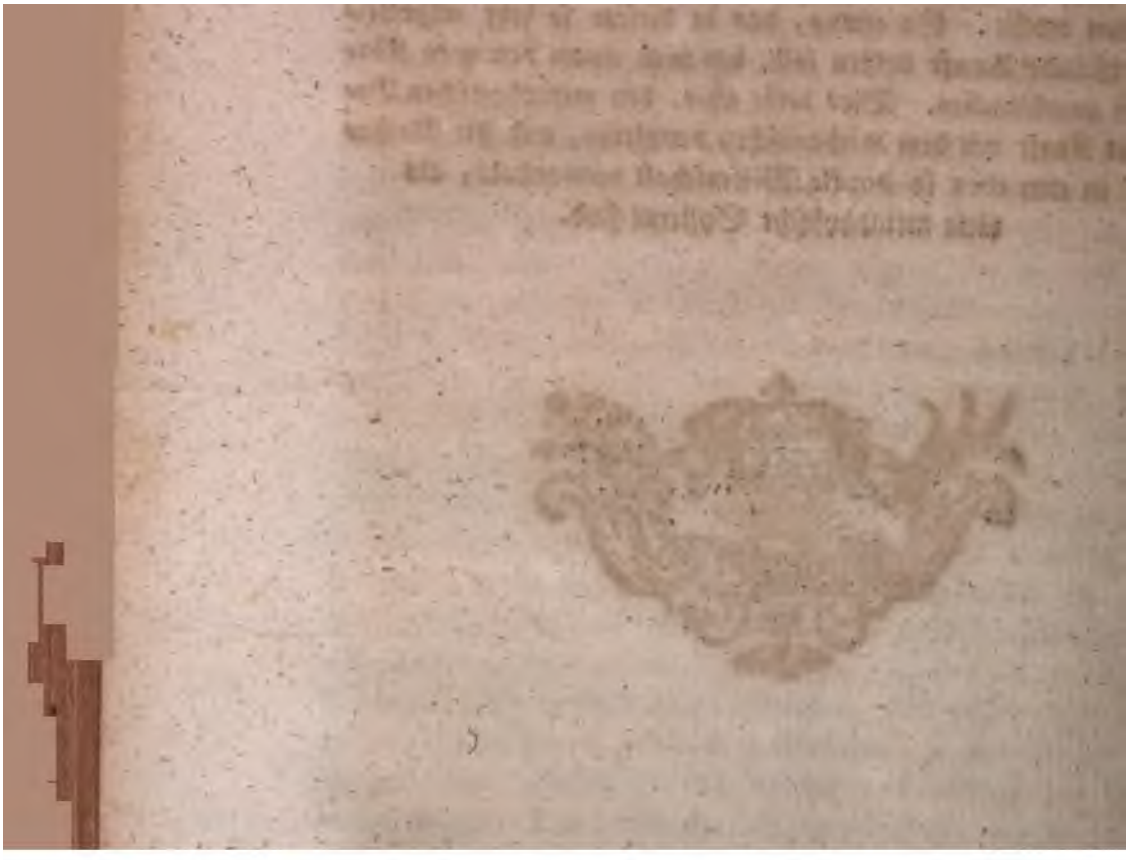
heißt die Frage, wie verhält ſich die lebendige Kraft einer Maſſe M zur Kraft der Maſſe N? eigentlich ſoviel: Wieviel kann M mehr oder weniger als N ausrichten? Wenn man nun die Höhen, worauf vertical aufwärts geworfene Körper ſteigen können, die Tiefe der Löcher, welche frey herabfallende Körper in weichen Thon ſchlagen können, die Anzahl elaſtiſcher Federn, welche ſie zuſammen preſſen können, u. ſ. w. für dasjenige annimmt, was dieſe den Maſſen zugeſchriebene Facultates ausrichten können; ſo muß freylich das Verhältniß $MC^2 : mc^2$ daraus folgen. Aber denn iſt nicht abzuſehen, warum ruhende, ja völlig unbewegliche Körper nicht eben ſo eine lebendige Kraft beſitzen ſollen. Man verwechsle die Umſtände mit den fallenden harten Kugeln in weichen Thon. Man laſſe eine weiche Kugel gegen einen vertical ſtehenden harten cylindriſchen oder prismatiſchen Pflock fallen, der in Vergleichung mit der Größe der Kugel eine geringe Dicke hat, ſo wird die Kugel auf demſelben, wie auf einem Spieß ſtecken bleiben. Hat dieſer Pflock nicht auch das Vermögen in die anſchlagende Kugel ein Loch von beſtimmter Tiefe zu bohren, oder iſt die Kugel allein die Urſache dieſes Erfolges, ohne daß der Widerſtand des Pflocks Antheil daran hat? Ich finde bey den harten in weichen Thon ſchlagenden Kugeln nichts, was in dem Verſtande Kraft heißen kann, in welchem dies Wort in der Mechanik ſonſt gebraucht wird, wenn ich ihnen in dem Augenblick der erſten Berührung die Schwere nehme, (wie hier geſchehen muß, da die vermeinte Kraft nun in dem Körper wegen der letzten Geſchwindigkeit ſchon befindlich ſeyn, und die Schwere nicht mehr in Betracht kommen ſoll). Sie dringen vermöge ihrer Trägheit in den Thon hinein, und der Druck, welcher in jedem Augenblick durch die Berührung der folgenden Theile entſtehet, vermindert die Bewegung der Kugeln ſo, wie die Schwere die Bewegung ſteigender Körper.

30. §.

Wenn nun dies alles, wie ich glaube, seine Richtigkeit hat, so weis ich nicht, ob ich irre, wenn ich behaupte, daß die statische Theorie von Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte überall bey dieser Streitigkeit sehr übel angebracht sey. Diese Lehre läßt sich nur da anwenden, wo von Pressungen die Rede ist, und das sollen die lebendigen Kräfte wenigstens nach der Bernoullischen Erklärung nicht seyn. Es ist gewiß sehr sonderbar, wenn die Diagonale und Seitenlinien eines Parallelograms facultates agendi vorstellen, und die letztern so verglichen werden sollen, wie man Pressungen vergleicht. Daher fällt alles von selbst weg, was aus dieser Theorie sowohl für als wider das leibnitz-bernoullische Kräftenmaas ist geschlossen worden. Ich kenne in der ganzen Statik und Mechanik keine andre Kräfte, als Pressungen, die entweder durch Hindernisse aufgehalten werden, oder die Massen, welche sie pressen, wirklich bewegen, und deren Natur in beyden Fällen einerley ist und bleibt. Aus diesen Begrifen, und dem, was Trägheit heißt, läßt sich die ganze Mechanik unvergleichlich herleeiten, und so viel ich einsehen kann, kömmt die ganze hier herrschende Verwirrung darauf an. Von einer mechanischen Kraft haben wir einen bloß sinnlichen Begrif, so wie z. E. von einer graden Linie. Daher können wir aus diesem Begrif eigentlich nichts schließen, wir müssen vielmehr die ersten Grundsätze der gesammten Mechanik, so gut wie die ersten geometrischen Grundsätze aus sinnlichen Empfindungen hernehmen. Druck, Zug, Stoß, sind die Wörter, die wir im gemeinen Leben da gebrauchen, wo eigentlich von einer bewegenden Kraft die Rede ist, und dies ist allemal etwas thätiges. Wir brauchen aber das Wort Kraft auch in unzähligen andern Fällen, wo es ein blosses Vermögen bezeichnet. Wir schreiben Geistern

Kräfte

Kräfte zu, dem einen eine größere, dem andern eine kleinere, wenn der eine mehr thun kann als der andre. Diese Kräfte kennen wir noch weniger, als die mechanischen, wir haben eigentlich, wenn wir es aufrichtig heraus sagen wollen, gar keinen Begrif davon. Diese Art Kräfte hat man mit den mechanischen unter ein genus bringen, und auf ähnliche Art, wie die mechanischen Kräfte vergleichen wollen. So etwas, das in diesem so sehr allgemeinen Verstande Kraft heißen soll, hat man einem bewegten Körper auch zugeschrieben. Dies heißt aber, den metaphysischen Begrif einer Kraft mit dem mechanischen verwirren, und die Mechanik in eine eben so dunkle Wissenschaft verwandeln, als viele metaphysische Systeme sind.



Frage,

wo ſo viele

Ausgüßungen der Flüße

in Baiern herrühren?

und wie denſelben abzuhelfen?

beantwortet

von

Herrn Euſebius Amorth,

Kanonikus Regularis zu Polling.

Die Urſache der ſo vielfältigen, und verderblichen Ausgüßungen der Flüße in Baiern, die wir ſeit vielen Jahren wahrnehmen, iſt nicht einem bey unſern Zeiten in größerer Menals ſonſt, herabfallenden Regen oder Schnee zuzuſchreiben: in die älteſten Leute in hieſigen Landen verſichern uns, daß, obhl es ehemals eben ſo viel geregnet, und geſchneyet hat, denh ſo groſſe Ueberſchwemmungen aller an die Flüße angränzenOrtſchaften nicht beobachtet worden. Die Urſache dieſer Ueſchwemmungen iſt alſo vielmehr von der Häufung des San, und der daraus entſpringenden Erhöhung des Grundes in den üßen herzuholen.

Es ist sehr wahrscheinlich, daß ein solcher Grund in hundert Jahren nach Unterschied der Geschwindigkeit des Flußes, und seiner eigenen Steinartigkeit um 1. 2. 3. Schuhe in seiner Höhe anwachse. Die Erfahrung selbst zeiget, daß diese Flüße nach merklicher Ansandung ihres Rinnsaales ihren Lauf verändern, und selben bald zur rechten, bald zur linken Seite richten, je nachdem sie hier oder dort einen niedrigern, und leichter sandichten Grund antreffen.

Wie viel Schaden durch dieses landverderbliche Uebel verursachet werde, ist aus den Klagen jener Unglücklichen bekannt, deren Wiesen, Felder, oder Häuser an dergleichen Flüße stossen. Die Erbarmung gegen diese armen Leute, und das höchste landesherrliche Interesse selbst erfordert es, daß man auf hinlängliche Wehrmittel bedacht sey, diesen gewaltsamen Austritten, und Abänderungen des Rinnsaales der Flüße vorzubeugen.

Mir deuchte das füglichste unter allen zu seyn, wenn man in grossen Flüßen eine Art von solchen Maschinen errichtete, dergleichen eine in Venedig zu Säuberung des Meergrundes errichtet worden, und noch immer in baulichem Stande erhalten wird, damit die Stadt nicht unschifbar, oder wohl gar mit der Zeit an das feste Land angehängt werde.

Freylich könnte man einwenden, daß, wenn man schon auf diese Art die Flüße von dem in Zeit von hundert Jahren zween bis drey Schuhe hoch angewachsenen Sande reinigen, und die Gründe in ihre alte Tiefe setzen könnte, dennoch eben hieraus andere unüberwindliche Beschwernisse erfolgen würden. Denn wenn schon die Iser, der Inn, und der Lech in ihre gehörige Grundtiefe gesenkt würden, so könnte doch eine grosse Anschwellung besagter

Flüße

Flüße nicht verhindert werden, sobald sie sich in einen andern Fluß eines höhern Grunds z. B. die Iser und der Inn in die Donau ergießen. Allein ich antworte hierauf, daß sich diese Anschwellung in ihrer Länge nicht viel über 200 bis 300 Schuhe, und in ihrer geneigten Höhe nur etwann auf 3 Schuhe erstrecken, folglich durch den Fleiß der Ruderknechte leichtlich würde überwunden werden. Vielmehr wäre zu befürchten, daß die Donau grossentheils in den niedrigern Rinnsaal der Iser, oder des Inns herunterzufallen trachten, und mit vereinigten Gewässern eine neue Bahn suchen, folglich aus zweyen Uebeln drey Uebel erfolgen würden. Allein diese Forcht ist weitschichtig, und ein so eitler Schrecken eines nur möglichen Uebels muß uns von einer vernünftigen Abwendung wirklicher Unglücke nicht hindern.

Man könnte auch diesen schädlichen Ueberschwemmungen durch holländische Dämme bis auf Passau vorbeugen, deren Unkosten sich in so kurzer Länge kaum über 50000. Gulden erstrecken würden.

Ich erinnere mich hier einer frommen Stiftung, welche von dem Hofmaler Amorth schon vor beyläufig hundert Jahren gemacht worden, und noch heut zu Tage genau beobachtet wird, um in einem gewissen District, **Ober Lengeries**, die Iser von grossen Steinen zu reinigen, und dadurch vieles Fluchen der Floßknechte zu verhindern. Welch einen unsterblichen Nachruhm, welch ein Verdienst um das Vaterland würde sich ein Menschenfreund, ein Patriot, den der Himmel mit Reichthum und Glücksgütern gesegnet hat, machen, wenn er entweder bey seinen Lebzeiten, oder durch eine letztwillige Vermächtniß eine solche Stiftung zu Säuberung der Flüße in Baiern von dem anwachsenden Sande und zu Verhütung der Ueberschwemmungen verordnete! Es würde diese

Verordnung vor andern Schankungen zum frommen Gebrauche auch dieſen Vorzug haben, daß dadurch nicht einzelne Perſonen, ſondern ganze und viele Familien, ja ganze Generationen vor Schaden und Armuth geſicheret würden. Welch ein ſüßer Gedanke, wäre er doch Reichen fühlbar! auch noch in ſeiner Aſche von ganzen Nachkommenſchaften geſegnet zu werden!

Leonard Grubers

Benediktiners

einige

analytiſche Beyſpiele

und

Anwendungen

der verſchiedenen

Wendungen der krummen Linien,

an die churfürſtliche Akademie der Wiſſenſchaften
in München eingeſendet.

1770.

Erinnerung.

Die Werke eines Krammers, dieſes ſo groſſen Meiſters in der Mathematik, ſind gewiß für ſich wichtig und nützlich genug einen Liebhaber der mathematiſchen Wiſſenſchaften und ſonderlich des höhern Kalkulus zu beſchäftigen. Man wird mir es alſo zu gut halten, wenn ich in Durchleſung dieſes ſo vortreflichen Buches etwas mehrers gewagt habe, als ſelbes bloß zu durchgehen. Ich habe nämlich ſeine erhabenen Grundſätze beſſer einzuſehen, und mich nach der Vorſchrift dieſes vollkommenen Mathematikers zu üben, einige Beyſpiele gewählet, welche in ſich zwar willkührlich herausgeſucht ſind, zu den nachgeſetzten

An-

Anwendungen aber, welche meine Hauptabſicht ſind, mir ſehr dienlich ſeyn werden. — In den vorausgeſchickten Begriſen zu Anfange des erſten Abſchnittes wird man ſich wohl einiger Klarheit halber auf des H. Krammers Werke beziehen müſſen; denn ich wollte und könnte ſelbe weder gänzlich weglaſſen, noch auch ausführlich anrücken. Die angeſetzten Beyſpiele habe ich nach der einfachſten und willkürlichen Methode berechnet. Man wird aus einer angeſtellten Vergleichung ſehen können, ob ich darinn glücklich war; und ein wiederhollter Verſuch mag ſelbe beſtättigen. —. Die in zweenen Abſchnitten gemachten Anwendungen, ob ſie ſchon etwa der gehabten Abſicht des vom Verfaſſer geſchriebenen Werkes nicht am nächſten kommen, *) ſo werden ſie doch derſelben in dem Stücke genug thun, daß ich damit ein obſchon geringes Probſtück liefere, wie die analytiſchen Grundſätze dieſes gelehrten Mannes nicht nur in ihrer Theorie erhaben ſind, ſondern auch auf andere Wiſſenſchaften, als hauptſächlich auf die Mechanik und Aſtronomie, einen ſtarken Einfluß haben, und mit einem ungemein groſſen Vortheile mögen angewendet werden. **) Hier iſt

*) Der Verfaſſer erkläret ſelbe in ihrem Umfange alſo: Par cette art infiniment utile de deduire d'un ſeul principe univerſel un grand nombre de verités, de les ſoumettre à des Regles generales, de les developper par des conſequences uniformes, & de les lier les unes aux autres, de la maniere la plus propre, à faire naitre de nouvelles deconvertes &c.

Preface de l'Anal.

**) On ſauroit s'en paſſer dans les Sciences, dont la Perfection depend de la geometrie, telles, que la Mechanique, l'Aſtronomie, la Phyſique. Les Syſtemes modernes ſuppoſent neceſſairement cette connoiſſance.

Pref. de la même.

also der zureichende Grund dieser meiner Beschäftigung aufgecket. Habe ich in der Zukunft genugsame Zeitmusse und hinichende Kräften, so werde ich davon mehrere und etwa sehr nützhe Anwendungen nach eben diesen Gründen zu machen, mir igelegen seyn lassen. Indessen wird es mir genug seyn, wenn ne Churfürstl. Akademie dieses geringe Piece als eine mittelmäge Nachahmung, und als ein Zeugniß meines Fleißes und Gee zur Mathematik aufzunehmen, gnädigstes Belieben trägt. Vielleicht werde ich mit der Zeit in wichtigern Gegenständen Ihn Beyfall zu erhalten im Stande seyn, wenn man mir doch für e weitere Beförderung meiner Lehrbegierde an die Hand gehen ird. Ich wünsche gewiß nichts so sehr als einer Churfürstl. Akamie meine obschon geringen Dienste ächt thätig wiedmen zu nnen.

Analytische Beyspiele und Anwendungen der verschiedenen Wendungen der krummen Linien.

Erster Abschnitt.

Einige Beyspiele derselben.

1. §.

Von den verschiedenen Wendungen der krummen Linien h einen ächten Begrif zu machen, so darf man nur eine krumme nie betrachten, wie selbe von einer geraden durchschnitten wird, so zwar, daß ein Theil davon auf dieser, der zweyte aber auf ier andern Seite zum Vorschein kömmt: wo es sich dann fün kann, daß eine solche gerade Linie, welche man deßwegen die

Secans nennet, die krumme in mehrern Puncten durchſchneidet. Wenn nun zween ſolche Puncte des Durchſchnittes ſich einander unendlich nahe ſind, daß ſelbe in einen einzelen Punct zuſammenfließen, und man ſie gar nicht mehr unterſcheiden kann, ſo machen ſie einen einzelen Berührungspunct aus. Hiemit wird die gerade Linie die krumme nicht mehr durchſchneiden, ſondern ſelbe nur in einem einzelen Puncte berühren: oder, wie man ſagt, die Secans wird zur Tangente.

2. §.

Der nämliche Punct einer Linie bekömmt eine gegenſeitige Wendung, wenn drey Durchſchnittspuncte in einem einzelen zuſammen fließen. Hiemit wird die gerade Linie, welche man durch dieſe 3 unendlich nahen Puncte ziehet, die krumme zugleich durchſchneiden und berühren (1. §.). Es mag ſich dieſes aber nur fügen in jenen Gattungen der krummen Linien, welche über die zwote ſogenannte Ordnung oder Klaſſe hinaus ſind; zum Beyſpiele in einer Parabole, wo man die Gleichung $y = ax^3$ annimmt. Nun in einem ſolchen Falle kann man wohl annehmen, daß die Tangente in dem Puncte einer entgegengeſetzten Wendung drey Puncte von der krummen Linie berühre: da doch in den krummen Linien der zwoten Gattung dieſe Berührung nur in einem einzelen Puncte geſchehen kann; in den gemeinern aber in zween Puncten, welche ſich nämlich einander unendlich nahe ſeyn müſſen: deßwegen wird man auch in dieſen letztern niemals einen Punct von einer entgegengeſetzten Wendung antreffen, wovon wir im analytiſchen Kalkulus genugſame Beyſpiele haben, und welche hier anzurücken, der enge Raum nicht zuläßt.

3. §.

3. §.

Ein Punct der Linie nimmt an sich eine schlangenförmige Wendung, wenn zum Beyspiele eine gerade Linie eine krumme von der 4ten oder noch höheren Klasse in dem Puncte der entgegengesetzten Wendung berührt. Deßwegen, wenn wir setzen, daß was immer für eine Secans unendlich klein werde, so wird sie die krumme Linie nicht mehr durchschneiden, sondern selbe nur berühren, allein diese Berührung geschieht in zween Punkten, welche man für 4. Durchschnittspuncte halten kann (§. 1.). Indessen, weil diese Puncte sich einander unendlich nahe sind, so wird man wohl die gegenseitige Wendung nimmermehr durch die Sinne wahrnehmen können, den der Raum, welchen sie einnehmen, ist unendlich klein. Um uns also diese schlangenförmige Wendung vorzubilden, müssen wir die Theorie des Analysis zu Hülfe nehmen, durch welche allein wir uns einen, obschon abstracten Begrif machen können.

4. §.

Es ist aber aus den gemeinern Beyspielen der Gleichungen einer Parabole schon ausgemacht, daß, wenn in selber $y = x^2$, oder $y = x^3$, oder $y = x^4$, oder $x = x^5$ und s. w. ist, die Tangente allzeit die krumme Linie in dem Puncte der gegenseitigen Wendung öfters als in zween Puncten berühre, als der Grad der entgegengesetzten Wendung anzeiget; also zwar, daß, wenn man für eine Parabole eine allgemeine Gleichung z. B. $y = x^m$ annimt, so ist es durchaus richtig, daß die Parabole in ihrem Ursprunge einen Punct der gegenseitigen Wendung hat, dessen Grad durch $m - 2$ kann ausgedrücket werden. Es wird auch dieser Punct der entgegengesetzten Wendung oder Krümmung scheinbar werden, wenn m eine ungleiche Zahl bedeutet: ist selbe aber nicht ungleich,

ist also der zureichende Grund dieser meiner Beschäftigung aufgedecket. Habe ich in der Zukunft genugsame Zeitmusse und hinreichende Kräften, so werde ich davon mehrere und etwa sehr nützliche Anwendungen nach eben diesen Gründen zu machen, mir angelegen seyn lassen. Indessen wird es mir genug seyn, wenn eine Churfürstl. Akademie dieses geringe Piece als eine mittelmäßige Nachahmung, und als ein Zeugniß meines Fleißes und Genie zur Mathematik aufzunehmen, gnädigstes Belieben trägt. Vielleicht werde ich mit der Zeit in wichtigern Gegenständen Ihren Beyfall zu erhalten im Stande seyn, wenn man mir doch für die weitere Beförderung meiner Lehrbegierde an die Hand gehen wird. Ich wünsche gewiß nichts so sehr als einer Churfürstl. Akademie meine obschon geringen Dienste ächt thätig wiedmen zu können.

Analytische Beyspiele und Anwendungen der verschiedenen Wendungen der krummen Linien.

Erster Abschnitt.

Einige Beyspiele derselben.

1. §.

Von den verschiedenen Wendungen der krummen Linien sich einen ächten Begrif zu machen, so darf man nur eine krumme Linie betrachten, wie selbe von einer geraden durchschnitten wird, also zwar, daß ein Theil davon auf dieser, der zweyte aber auf einer andern Seite zum Vorschein kömmt: wo es sich dann fügen kann, daß eine solche gerade Linie, welche man deßwegen die

ſo iſt die Krümmung dieſes Punctes unwahrnehmlich: und in dieſem Falle, wird es eigentlich ein Punct von einer ſchlangenförmigen Wendung ſeyn.

5. §.

Dieſes ſind nun die Hauptbegrife, welche vorauszuſetzen es nöthig war, um die nachfolgenden Beyſpiele und Anwendungen in das Klare zu bringen. Will man aber von dieſen Begrifen eine mehrere Erklärung oder auch Beyſpiele davon haben, ſo kann man ſelbe in den analytiſchen Werken des Herrn Krammers und des Mr. de Gua *) finden. Uebrigens war bisher nur die Rede von den einfachen Puncten in ihren verſchiedenen Wendungen; denn es giebt auch noch andere, welche ſich in Rückſicht auf die nämliche krumme Linie vervielfältigen können. Alſo z. B. iſt es ein zweyfacher Punct, wenn ſelber zween Bögen oder ſogenannten Aeſten der krummen Linie gemein iſt, oder auch durch welchen man die krumme Linie zweymal ziehet. Auf gleiche Weiſe nennt man einen dreyfachen Punct, welcher dreyen Puncten der krummen Linie gemein iſt, oder durch welchen die krumme Linie dreymal ſich wälzet, und ſo weiters zu reden von den vier, fünffachen Puncten, von welchen gleichfalls in benennten Werken Beyſpiele anzutreffen ſind. Ich will alſo bey andern Beyſpielen den Anfang machen.

6. §.

Es iſt in der Theorie der verſchiedenen Wendungen eines Punctes in einer krummen Linie ein Hauptgrund, daß man wiſſe, ob ein ſolcher Punct, deſſen Lage wir indeſſen außer den Urſprung

*) Uſage d' Anal.

ſprung der krummen Linie annehmen wollen, einfach oder vielfältig ſey. Man kann ſolches nach der folgenden Methode ausforſchen. Man überſetze vor allen den Urſprung der krummen Linie auf den gegebenen Punct; und man ziehe daſelbſt eine Abſciſſe m und eine Ordinate n. In der Gleichung ſelbſt ſetze man ſtatt x ein $m + x$ und ſtatt y ein $n + u$. Wenn man nun dieſe Werthe in der gegebenen Gleichung einrücket, ſo kann man ſelbſt aus der Zahl der mangelhaften Reihen, welche in der Gleichung zum Vorſchein kommen, von der Natur des gegebenen Puncts ein Urtheil fällen. Doch in der Umänderung der gegebenen Gleichung richtig und bequem zu gehen, wird es gut ſeyn, wenn man die gegebene Gleichung in einer Reihe ſchreibt, und unter einem jeden Abſatz derſelben die Exponenten des x und y hinſetzt, welche man zwar durch einen Punct unterſcheidet, ohne aber hiedurch eine Multiplication anzuzeigen, ſondern nur zu erinnern, daß der erſte Exponent von dem y, der zweyte von dem x geborget ſey. Man ziehe ſodann unter dieſe beyden Reihen eine Linie, und multiplicire durch den Exponenten des y alle Abſätze der gegebenen Reihe ins beſondere. Man ſoll aber das y einmal weglaſſen, und ſtatt ſelben ein u einrücken. Auf gleiche Weiſe verfährt man mit dem Exponenten des x, welches man gleichfalls einmal wegläßt, und dafür ein x anſetzt. Dieſe Berechnungsart ſetzt man durch jede Abſätze der gegebenen Gleichung fort; und, weil man die neu erhaltene allzeit unter die gezogene Linie herabſetzt, ſo bekömmt man wiederum eine neue Reihe. Den Abſätzen dieſer neuen Reihe ſetze man ein $\frac{1}{2}$ des Exponenten hinzu, welcher von dem y iſt übrig geblieben, wie auch ein $\frac{1}{2}$ des Exponenten von x. Alsdenn fahre man mit der nämlichen Berechnungsart ſo lange fort, bis in keinem Abſatze der gegebenen Gleichung das y oder x mehr zum Vorſchein kömmt. Endlich ſammle man die Abſätze, welche von dem u und x in der nämlichen Potenze ſtehen, zuſammen,

und, da man ſtatt des y ein n, und für das x ein m anſetzet, ſo bekömmt man eine ganz neue Gleichung, ſo wie wir es klärer im folgenden Beyſpiele ſehen werden.

7. §.

Erſtes Beyſpiel.

$y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$.*)

4.0. 3.0. 2. 1. 2. 0. 1.1. 0.2. 0.1. = 0.

$+ 4y^3u - 24y^2u - (24xyu - 12y^2z) + 32yu +$

$\frac{3}{2}.0. \quad \frac{2}{2}.0 \quad \frac{1}{2}.\frac{1}{2}. \quad \frac{2}{2}.0. \quad \frac{1}{2}.0.$

$(48xu + 48yz) + 8xz - 64x$

$0.\frac{1}{2}. \quad \frac{1}{2}.0. \quad 0.\frac{1}{2}. \quad 0.0.$

$+ 6y^2u^2 - 24yu^2 - (12xu^2 - 12yuz) - 12yuz +$

$\frac{3}{3}. 0. \quad \frac{1}{3}.0. \quad 0.\frac{1}{3}. \quad \frac{1}{3}.0. \quad \frac{1}{3}.0.$

$+ 16u^2 + 24zu + 24zu + uz^2$

$0.0. \quad 0.0. \quad 0.0. \quad 0.0$

$+ 2yu^3 - 8u^3 - 4u^2z - 4u^2z - 4^2x.$

$\frac{1}{4}.0. \quad 0.0. \quad 0.0. \quad 0.0. \quad 0\ 0$

Die Abänderung der gegebenen Gleichung wird alſo folgende ſeyn

$n^4 - 8n^3 - 12mn^2 + 48mn + 4m^2 - 64m + (4n^3 - 24n^2 - 24mn + 32n + 40m)u + (-12n^2 + 48n + 8m - 64)z + (22n^2 - 24n - 12m)u^2 + 4z^2 + (24n + 24)zu + (2n - 8)u^3 - 12u^2z - \frac{u^4}{2} = 0.$

8. §.

*) Dieſe Gleichung, welche ich zur Ausführung dieſes Beyſpieles angenommen, iſt wirklich die Gleichung einer krummen Linie, (ſiehe weiter zurück 14. §) und man kann ſelbe auch in des Krammers analytiſchem Werke angeſetzt finden: allein er beziehet ſich in dieſem Stücke auf des Saurins Abhandlungen, welche in den memoires de l'Academie 1716. Pag. 61. nachzuſuchen ſind.

8. §.

Wenn man auf die ganze Abänderung der gegebenen Gleichung und auf ihre nacheinander angesetzten Reihen aufmerksam ist, so wird man leicht wahrnehmen, daß, weil m und n als bestimmte Quantitäten angenommen werden, die ganze erste Reihe der abgeänderten Gleichung bestimmt sey, und wenn man selbe auf ein analytisches Dreyeck beziehet, so wird sie in dessen Gipfel zu stehen kommen. Deßwegen, wenn diese erste Reihe nach eingerücktem Werthe des x und y, dem m nämlich und den n (6. §.) nicht gänzlich getilget wird, so gehört der zum Ursprunge einer Linie angenommene Punct nicht zu einer krummen Linie: löset sich aber diese Reihe in ein O auf, so ist es ein Zeichen, daß dieser Punct zur krummen Linie gehöre.

9. §.

Wenn man nun einmal diesen Punct bestimmt hat, daß selber zur krummen Linie gehöre, so kann man untersuchen, ob selber einfach oder vielfältig sey (5. §.) Man muß also die zwote abgeänderte Reihe der gegebenen Gleichung hernehmen, und in selber die Werthe von m und n einrücken. Es ist aber klar, daß in dieser Reihe das u und x als die einfachsten Potenzen enthalten sind; hiemit alle diese Absätze in einem analytischen Dreyecke die erste Horizontalreihe von dem Gipfel an einnähmen. Wenn nun besagte abgeänderte Reihe sich selbst nicht gänzlich tilget, sondern ein oder andrer Absatz übrig bleibt, in welchem ein u oder x enthalten sind, so ist es gewiß, daß auch in einem Dreyecke die erste Horizontalreihe von der Spitze desselben schon eingenommen sey: hingegen tilget sich diese Reihe, das ist, ist die Spitze des analytischen Dreyeckes noch leer, so kann man schließen, daß daß der angenommene Punct nur einfach sey. Tilget sich nun

ferners

ferners auch die zwote abgeänderte Reihe, ſo hat man ſich an die dritte zu halten, und in ſelber die Werthe des m und n einzurücken. Wenn dieſe ſich nicht tilget, ſo wird in einem analytiſchen Dreyecke die zwote Horizontalreihe von der Spitze an eingenommen ſeyn, weil nämlich in ſelber Abſätze enthalten ſind, in welchen man das u^2, uz, und z^2 antrift (7. §.). Und alſo wird der Punct zweyfach ſeyn. Gehet man noch weiters, und tilget ſich gleichfalls die dritte Reihe, ſo wird man in der vierten die nämlichen Werthe des m und n einrücken müſſen, und dieſes ſo lang, bis man weis, ob der Punct dreyfach, vierfach ꝛc. ſey. Ich ſetze hievon Beyſpiele an.

10. §.

Zweytes Beyſpiel.

Man nehme die vorige Gleichung, welche ſchon §. 7. in eine andere iſt abgeändert worden. Man kann alſo davon zum erſten unterſuchen, ob der Punct, deſſen ordinate wir n die Abſciſſe aber m geheißen haben (§. 8.) und davon ich eine jede $=2$ annehme, zur krummen Linie gehöre. Dieſes auszuforſchen, ſo darf man nur in der gegebenen Gleichung: $y^4 = 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$ ſowohl für y als x den 2 einrücken, und man wird folgende Gleichung überkommen; nämlich: $16 - 64 - 96 + 64 + 192 + 16 - 128 = 0$. Weil nun dieſe erſte Reihe ſich ſelbſt tilget, ſo gehört nach dem erſt geſagten (§. 8.) der angenommene Punct zur krummen Linie.

11. §.

Nachdem man nun weis, daß dieſer Punct zur krummen Linie gehöre, ſo läßt weiters die Frage, ob ſelber unter die einfachen

chen oder vielfältigen zu zählen ſey (§. 5.). Man nehme alſo von der gegebenen und ſchon abgeänderten Gleichung die zwote Reihe für ſich, nämlich

$y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x$ (§. 7.)

4. 0. 3. 0. 2. 0. 2. 0. 1. 1. 0. 2. 0. 1

$4y^3u - 24y^2u - 24xyu - 12y^2x + 32yu + 48xu$
$+48yx + 8xx - 64x$

Setzt man nun für das x und y den beſtimmten Werth von m und n, nämlich $= 2$ und 2 an (§. 10.), ſo überkömmt man folgende Reihe:

$(4y^3 - 24y^2 - 24xy + 32y + 48x)u +$
$(32 - 96 - 96 + 64 + 96)u +$
$(-12y^2 + 48y + 8x - 64)x.$
$(-48 + 96 + 16 - 64)x.$

Weil nun auch die buchſtäbliche Quantitäten nämlich u und x einander aufgehoben werden, ſo verbleibt die andere Horizontalreihe eines analytiſchen Dreyeckes leer, und hiemit iſt der angenommene Punct wenigſt zweyfach (§. 9.)

12. §.

Nach dem erſtgeſagten tilget ſich alſo auch die zwote Reihe, und daher kann man mit der dritten Reihe einen ferneren Verſuch machen, um nämlich zu ſehen, ob der angenommene Punct etwa nicht dreyfach ſey (§. 9.). Man nehme alſo von der gegebenen und ſchon abgeänderten Gleichung die dritte Reihe (§. 7.), und, wenn man damit nach der vorigen Methode (§. 9.) verfährt, ſo überkömmt man folgendes.

$4y^3 - 24y^2u - 24xyu - 12y^2x + 32yu + 48xu$
$\frac{1}{2}.0. \quad \frac{1}{2}.0. \quad \frac{1}{2}. \quad \frac{1}{2}. \quad \frac{2}{2}.0 \quad \frac{1}{2}.0. \quad 0.\frac{2}{2}.$
$+48yx + 8xx - 64x.$
$\frac{1}{2}.0. \quad 0.\frac{1}{2}. \quad 0.0$

$6y^2u^2 - 24yu^2 - 12xu^2 - 12yux - 12yux + 16u^2 + 24ux + 24ux + 4x^2.$
oder: $(6y^2 - 24y - 12x + 16)u^2 + (-12y - 12y + 48)ux + 4x^2.$

13. §.

In der zwoten vorher angeſetzten Reihe (§. 11.) haben wir ſtatt des x und y ihren Werth m und $n = 2$ und 2 angeſetzt, wodurch dann die letzte Reihe ſich ſelbſt aufgehoben hat. Doch dieſes wurde niemals in der dritten Reihe (§. 12.) angehen, wenn man es verſuchen ſollte; denn dadurch würde doch niemals der Abſatz der letzten Reihe, nämlich $4x^2$, in welchem nämlich kein x oder y zum Vorſchein kömmt, können getilget werden. Aus der Aufhebung alſo einer ferneren Operation iſt es klar, daß der unterſuchte Punct nur zweyfach ſey (§. 9.).

14. §.

So unnütz es nun ſeyn würde wegen der fernern Unterſuchung des angenommenen Puncts weiter zu gehen, und eine fernere Abänderung der letzt erhaltenen Reihe vorzunehmen (12. §.), ſo würde man doch ein ſolches thun können um die Natur der krummen Linie, für welche dieſe Gleichung gegeben wurde (7. §. *) vollkommen auszuforſchen. Wenn man alſo in der ganzen abgeänderten Finalgleichung, welche wir oben (§. cit.) angeſetzt haben, für das m und n ihren Werth nämlich 2 einrücken (§. 10.), ſo wird die angeführte Finalgleichung ſich in folgende verwandeln:

$u^4 - 12u^2x - 32u^2 + ux^2 = 0$. Dieſe Gleichung hat nun 4 Wurzel davon I. $u = \surd(8x + 16 + 4\surd(2x^2 + 12x + 6))$ II. $u = -\surd(6x + 16 + 4\surd(2x^2 + 12x + 6))$. III. $u = +\surd(6x + 16 - 4\surd(2x^2 + 12x + 6))$. IV. $u = -\surd(6x + 16 - 4\surd(2x + 1 + 16))$. Oder aber, wenn wir ſie abkürzen, bekommen wir folgende Ausdrücke: I. $+\surd(4x + 8) + \surd(2x + 8)$. II. $-\surd(4x + 8) - \surd(2x + 8)$. III. $+\surd(4x + 8) - \surd(2x + 8)$. IV. $-\surd(4x + 8) + \surd(2x + 8)$. Wollen wir nun nach des Krammers Beyſpiele * dieſe Ausdrücke wirklich auf eine krumme Linie beziehen, und für die Figur, welche auf die gegebene Gleichung paßt (§. 7.) einige Anwendung machen, ſo werden wir ſehen, daß jeder Ausdruck einen paraboliſchen Aſt in der beygeſetzten Figur anzeige. Alſo beziehet ſich der erſte Ausdruck $u = \surd(4x + 8) + \surd(2x + 8)$ auf dem Aſt f D; der zweyte, $u = -\surd(4x + 8) - \surd(2x + 8)$ auf F d; der dritte $u = +\surd(4x + 8) - \surd(2x + 8)$ auf F A E; der vierte $u = -\surd(4x + 8) + \surd(2x + 8)$ auf f A e. Die letztern zween haben zum Aſymptote die Parabole e A E, wovon die Gleichung iſt $u^2 = (6 - 4\surd 2)x$; die erſteren aber die Parabole d A D, unter der Gleichung $u^2 = (6 + 4\surd 2)x$. Endlich wird die gegebene Gleichung: $y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$ (§. 7.) durch eben dieſe Figur vorgeſtellt, nämlich durch die krumme Linie, welche man auf den Punct F als ihren Urſprung beziehet, und deßwegen der Punct A für einen zweyfachen (§. 5.) muß angeſehen werden, deſſen Abſciſſe nämlich F G, und die Ordinate G A iſt, deren eine jede = 2 (§. 11.).

15. §.

Die ganze Berechnung und Ausführung dieſes gegebenen Beyſpieles (§. 10.) hat für ſich vorausgeſetzt, daß der angenom-

*) Siehe deſſelben Analyſe auf der 419. Seite.

nommene Punct zur krummen Linie gehöre, ſo wie wir dieſes ſchon vorher (§. 11.) beſtimmet haben. Setze man nun, daß der angenommene Punct außer dem Urſprunge der krummen Linie in einer deren zwoen Axen anzutreffen ſey, ſo wird die ganze Abänderung der gegebenen Gleichung viel leichter ausfallen; denn iſt der gegebene Punct in der Axe der Abſciſſen, ſo muß man eben darum das $y = o$ und das $x = n$ (welches in dieſem Falle eine unabänderliche Quantität anzeiget) annehmen: hiemit werden ſich alle Abſätze der gegebenen Gleichung, welche nämlich mit dem y multipliciret ſind, von ſelbſt aufheben; und alſo die Abänderung nur mit jenen vorzunehmen ſeyn, in welchen das x zum Vorſchein kömmt. Auf gleiche Weiſe, wenn man den angenommenen Punct in die Axe der Ordinaten überſetzet, ſo wird das x getilget, das y aber einer unabänderlichen Quantität müſſen gleich gehalten werden.

Drittes Beyſpiel.

16. §.

Ich nehme hier wiederum eine Gleichung: $y^3 - 2ay^2 + a^2y + x^2y - 2ax^2 = o$, welche ſich auf die beygeſetzte Figur beziehet, und die krumme Linie P A M zum Gegenſtand hat, wovon der Urſprungspunct in P geſetzet wird. * Es iſt alſo der gegebene Punct außer der krummen Linie, ſo wie wir es vorher verlangt haben (§. 15.). Nun unterſuche man, ob der Punct A einfach oder vielfach ſey. Weil man hier P A $= a$, und $x = o$ annehmen muß, ſo kann man in der gegebenen Gleichung die Abſätze $x^2y - 2ax^2$ weglaſſen. In den übrigen aber ſtatt des y das a ein-

*) Die Conſtruction dieſer krummen Linie, wie auch den Beweis ihrer Gleichung kann man in dem angezogenen analytiſchen Werke des Krammers pag. 411. finden.

einrücken. Hiemit bekömmt man ſtatt der gegebenen folgende Gleichung: $a^3 - 2a^3 + a^3 = 0$. Der Punct A gehört alſo zur krummen Linie (§. 8.). Nun mache man einmal mit der gegebenen Gleichung eine Abänderung nämlich:

$$y^3 - 2ay^2 + a^2y$$
$$3 \qquad 2 \qquad 1$$

$(3y^2 - 4ay + a^2)u$ (§. 6.); und wenn man für das a ein y einrückt, ſo iſt $(3a^2 - 4a^2 + a^2)u = 0$. Es tilget ſich alſo die erſte Horizontalreihe, und der Punct iſt wenigſt dreyfach (§. 9.). Nehmen wir aber von der gegebenen abgeänderten Gleichung die dritte Reihe, nämlich:

$$3y^2u - 4ayu + a^2u$$
$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \qquad 0$$

$3u^2y - 2au^2$, ſo ſehen wir ſogleich, daß, wenn wir auch ſtatt des y das a einrücken, dennoch dieſe Reihe nicht getilget werde. Deßwegen kann man ſchließen, daß der unterſuchte Punct A nur allein zweyfach ſey. (§. cit.)

17. §.

Alles, was bisher iſt angeführt worden, zielet ab, theils die ganze Abänderung einer gegebenen Gleichung zu finden (§. 8.), theils die Vielfältigkeit des gegebenen Puncts zu beſtimmen (§§. 9. 12.) theils ſelben auf die krumme Linie zu beziehen (§. 10.), und endlich die Natur der krummen Linie für die gegebene Gleichung auszuforſchen (§. 14.): dieſes aber ſind nur ſonderliche Fälle. Man kann aber auch allgemeine ſetzen, wo dann ſowohl die Beyſpiele als die Methode ſelbſt ſich unter einem anderen Geſichtspuncte darſtellen wird. Ein ſolcher allgemeiner Fall iſt es, wenn man insgemein fraget, ob die gegebene Gleichung, welche ſich auf

nommene Punct zur krummen Linie gehöre, ſo wie wir dieſes ſchon vorher (§. 11.) beſtimmet haben. Setze man nun, daß der angenommene Punct außer dem Urſprunge der krummen Linie in einer deren zwoen Axen anzutreffen ſey, ſo wird die ganze Abänderung der gegebenen Gleichung viel leichter ausfallen; denn iſt der gegebene Punct in der Axe der Abſciſſen, ſo muß man eben darum das $y = 0$ und das $x = n$ (welches in dieſem Falle eine unabänderliche Quantität anzeiget) annehmen: hiemit werden ſich alle Abſätze der gegebenen Gleichung, welche nämlich mit dem y multipliciret ſind, von ſelbſt aufheben; und alſo die Abänderung nur mit jenen vorzunehmen ſeyn, in welchen das x zum Vorſchein kömmt. Auf gleiche Weiſe, wenn man den angenommenen Punct in die Axe der Ordinaten überſetzet, ſo wird das x getilget, das y aber einer unabänderlichen Quantität müſſen gleich gehalten werden.

Drittes Beyſpiel.

16. §.

Ich nehme hier wiederum eine Gleichung: $y^3 - 2ay^2 + a^2y + x^2y - 2ax^2 = 0$, welche ſich auf die beygeſetzte Figur beziehet, und die krumme Linie P A M zum Gegenſtand hat, wovon der Urſprungspunct in P geſetzet wird. *) Es iſt alſo der gegebene Punct außer der krummen Linie, ſo wie wir es vorher verlangt haben (§. 15.). Nun unterſuche man, ob der Punct A einfach oder vielfach ſey. Weil man hier $PA = a$, und $x = 0$ annehmen muß, ſo kann man in der gegebenen Gleichung die Abſätze $x^2y - 2ax^2$ weglaſſen. In den übrigen aber ſtatt des y das a ein-

*) Die Conſtruction dieſer krummen Linie, wie auch den Beweis ihrer Gleichung kann man in dem angezogenen analytiſchen Werke des Krammers pag. 411. finden.

den seyn; zugleich wurden auch zu den vorigen 6 Gleichungen 4 neue hinzukommen ꝛc. Die Aufgabe wird also mehr als bestimmt, und öfters auch nicht einmal auflößlich seyn. Ich will davon wiederum ein Beyspiel geben.

19. §.

Viertes Beyspiel.

Ich nehme die schon einmal angesetzte Gleichung; nämlich $y^3 - 2ay^2 + a^2y + x^2y - 2ax^2 = 0$ (16. §.)

3.0. 2.0. 1.0. 1.2. 0.2.

$(3y^2 - 4ay + a^2 + x^2)u + (2xy - 4ax)z.$

Man erhält also folgende 3 Gleichungen (17. §.) I. $y^3 - 2ay^2 + ay^2 + x^2y - 2ax^2 = 0$. II. $3y^2 - 4ay + a^2 + x^2 = 0$. III. $2xy - 4ax = 0$. Diese letzte Gleichung wird nun die bequemste seyn, hiedurch den Werth des x zu bestimmen. Doch, weil selbe sich nicht aufhebt, als in dem Falle, daß man das $y = 2a$ oder das $x = 0$ annehme, so setzen wir einmal, weil man doch den Werth des x untersuchen soll, daß $y = 2a$: hiemit verwandelt sich die gegebene Gleichung (16. §.) in folgende: $12a^2 - 8a^2 + a^2 + x^2 = 5a^2 + x^2 = 0$; und also wird $x = \pm a\sqrt{-5}$, welche Auflösung denn wegen der negativen Wurzel unter die Reihe der unmöglichen gehört. Man muß sich also zu einer andern wenden, und nach dem gesagten das $x = 0$ annehmen. In diesem Falle wird die vorgesetzte zwote Gleichung nämlich $3y^2 - 4ay + a^2 + x^2 = 0$ in $3y^2 - 4ay + a^2 = 0$ abgeändert werden, wo denn $y^2 - \frac{4}{3}ay = -\frac{1}{3}a^2$ und nach vollkommen ersetzten Quadrate und ausgezogener Wurzel bekömmt man endlich das $y = \frac{2a}{3} \pm \frac{a}{3}$; das ist: $y = a$, $y = \frac{a}{3}$. Rücke

man

man nun in der erſten Gleichung ſtatt des y die erſte Wurzel a ein, und nehme man zugleich $x = 0$ an, ſo wird ſeyn $a^3 - 2a^3 + a^3 = 0$. Es hat alſo die krumme Linie, welche zu dieſer Gleichung gehört (16. §.), einen vielfachen und zwar einen zweyfachen Punct (9. §.), wovon die Abſciſſe $= 0$, die Ordinate $= a$ iſt. Die andere Wurzel nämlich $\frac{a}{3}$ iſt, wie man ſieht, zur weitern Berechnung unbrauchbar. Allein man könnte weiters fragen, ob dieſer Punct etwa nicht dreyfach ſey. Man unterſuche alſo die zwote Reihe der abgeänderten Gleichung (16. §.).

$3y^2u - 4ayu + a^2u + 2xyz + 4ax.z + x^2u$

$\frac{2}{2}.0. \quad \frac{1}{2}.0. \quad 0.0. \quad \frac{1}{2}.\frac{1}{2}. \quad 0.\frac{1}{2}. \quad \frac{2}{2}$

$3yu^2 - 2au^2 + xuz + yz^2 - 2az^2 + xuz.$

$(3y - 2a)\,u^2 + 2xuz + (y - 2a)\,z^2.$

Man überkömmt alſo folgende Gleichungen: I. $y^3 - 2ay^2 + a^2y + x^2y - 2ax^2 = 0$. II. $3y^2 - 4ay + a^2 + x^2 = 0$. III. $2xy - 4ax = 0$. IV. $3y - 2a = 0$. V. $2x = 0$. VI. $y - 2a = 0$. Wir haben aber erſt gezeigt, daß, wenn wir $y = 2a$ annehmen, die Auflöſung unter die unmöglichen müſſe gezählet werden. Nimmt man aber aus der 5ten angeſetzten Gleichung des $x = 0$, ſo wird die erſte Gleichung in $y^3 - 2a^2y + a^2y = 0$; oder in $y^2 - 2ay + a^2 = 0$ verwandelt, wo man denn zwo gleiche Wurzel überkömmt; nämlich $y = a$ und $y = a$. Die ſechſte Gleichung gilt endlich $y = 2a$. Weil es aber unmöglich iſt, daß auf einem einzelen Punct eine zweyfache Abſciſſe ruhe, ſo iſt der unterſuchte Punct der krummen Linie keineswegs dreyfach.

20. §.

Fünftes Beyspiel.

Nach den angeführten Regeln (17. 18. §§.) werde ich nun auch für den nämlichen Fall als es im letzt berechneten Beyspiele geschehen (19. §.) auch die oben angesetzte Gleichung (7. §.) untersuchen, wo es denn nicht mehr nöthig seyn wird, sich auf die schon bekannte Methode (17. 18. 19. §§.) zu beziehen.

$y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$

4. 3. 2. 1. 2. 1. 1. 2. 1.

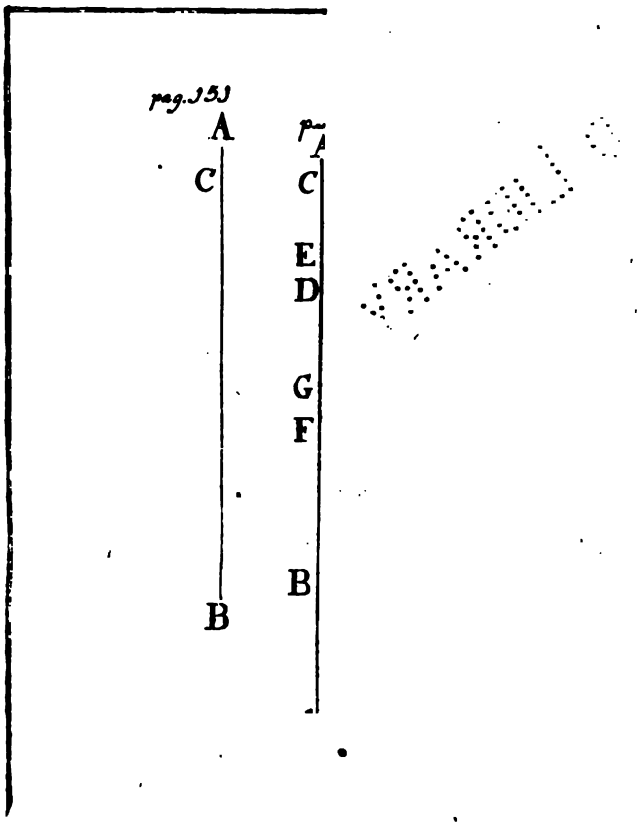
$4y^3u - 24y^2u - 24xyu - 12y^2x + 32yu + 48xu +$
$\frac{3}{4}. \quad \frac{2}{4}. \quad \frac{1}{4}.\frac{1}{4}. \quad \frac{2}{4}. \quad \frac{1}{4}. \quad \frac{1}{4}.$
$48yx + 8xx - 64x$
$\frac{1}{4}. \quad \frac{1}{4}$

$6y^2u - 24yu^2 - 12xu^2 - 12yux - 12yux + 16u^2 +$
$24ux + 24ux + 4x^2.$

Hieraus lassen sich folgende 6. Gleichungen ansetzen: I. $y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$. II. $4y^3 - 24y^2 - 24y^2 - 24xy + 32y + 48x = 0$. III. $-12y^2 + 48y + 8x - 64 = 0$. IV. $6y^2 - 24y^2 - 12x + 16 = 0$. V. $-24y + 48 = 0$. VI. $4 = 0$. Mittels der fünften Gleichung ist $48 = 24y$, und also $y = 2$. Rückt man diesen Werth in die vierte Gleichung ein, so wird $24 - 48 - 12x + 16 = 6 - 12 - 3x + 4 = 0$; hiemit $x = -\frac{2}{3}$. Ist $y = 2$, und übersetzt man davon den Werth in die dritte Gleichung, so wird $-48 + 96 - 64 + 8x = -6 + 12 - 8 + x = -2 + x = 0$, hiemit $x = 2$. Setzt man nun diesen Werth des x, wie auch den erfundenen von y in die vorigen 6. Gleichungen I. $16 - 64 - 96 + 64 + 192 + 16 - 121 = 9$. II. $32 - 96 - 96 + 64$

$+ 96 = 0$. III. $- 48 + 96 + 16 - 64 = 0$. IV. $24 - 48 - 24 + 16 = 0$. V. $- 48 + 48 = 0$. VI. Ist eine nicht mögliche Gleichung. Unterschiebt man nun die Werthe $x = 2$ und $y = 2$, so werden sich nur die ersten drey Gleichungen tilgen; die andern drey aber kommen nicht einmal überein, hiemit ist der Punct nur zweyfach (9. §.).

pag. 153



$+ 96 = 0$. III. $- 48 + 96 + 16 - 64 = 0$. IV. $24 - 48 - 24 + 16 = 0$. V. $- 48 + 48 = 0$. VI. Iſt eine nicht mögliche Gleichung. Unterſchiebt man nun die Werthe $x = 2$ und $y = 2$, ſo werden ſich nur die erſten drey Gleichungen tilgen; die andern drey aber kommen nicht einmal übereins, hiemit iſt der Punct nur zweyfach (9. §.).

Leonard Grubers
Benediktiners vom Kloſter Metten,

einige

Grundſätze

der

Theorie der Centralkräfte,

in Rückſicht

auf die

Aſtronomie.

Vorbericht.

Man kann wohl ſagen, daß die Vollkommenheit der Aſtronomie meiſtens von der mehreren Aufklärung, Ausbreitung und Auszierung der Theorie der Centralkräfte abhängt. Newton; dieſer groſſe Newton hat uns davon die erſten Grundſätze, welche ſich in den allgemeinen Geſetzen der Natur ſelbſt gründen, aufgedecket. Er hat uns in ſeiner ſo erhabenen als einfachen Theorie der anziehenden Kraft das ächte Bildniß der wirkenden Natur anſchauen gelehret. Von dieſen Zeiten mag man wohl die glücklichen Epochen einer gegründeten, einer aufgeklärten Aſtronomie herzählen. * Man läßt ſich auch jetzt noch ſehr angelegen ſeyn, die Theorie dieſer anziehenden Kraft mehr und mehr aufzuklären, mit noch mehr dringenden Beweiſen zu unterſtützen, und ſelbe nach ihrem ganzen Umpfange auszubreiten. Die geſchickteſten Mittel ſind hiezu ohne Zweyfel eine richtige Mechanik-Lehre und höhere Geometrie. Ich will davon in dieſer Abhandlung ein Beyſpiel geben, und einige vornehmere Grundſätze von der Theorie der anziehenden Kraft, welche eben in ſich nicht ſo bekannt und aufgeklärt, als nutzbar ſelbe in Rückſicht auf die Aſtronomie ſind, aus den Grundſätzen einer neueren und verbeſſerten Mechanik und höheren Geometrie herzuleiten, mir angelegen ſeyn laſſen; indem ich zei-

*) La Decouverte de l'Attraction ouvrit, pour ainſi dire, aux Philoſophes un nouveau ciel. Mr. de la Lande en Aſtron. Livr. XIX. §. 2420.

gen werde, was man daraus für nützliche und vortheilhafte Theoremes sowohl für verschiedene Gegenstände der Anziehungskraft selbst als der davon abhangenden Umwendungen auf die verschiedene Kreutzungen des Planetenlaufes wird machen können. Eines muß ich noch anmerken, daß ich nach dem Beyspiele anderer Mathematiker die in dieser Theorie durch gewisse Buchstaben festgesetzten Ausdrücke, und deßwegen auch einige Figuren für meine Beweise beybehalten habe; und obschon ich einige sonderliche Lehrsätze aus der Lehre von den Kegelschnitten angesetzet habe; so nehme ich davon einige leichtere Sätze aus der gemeinern Mechanik und Geometrie als bekannt an; um in Anführung der Beweise dieser überall schon festgestellten Sätze nicht gar zu sehr ausschweifen zu dürfen, weil ohne das diese Abhandlung nicht den Ruhm eines gelehrten Werkes, sondern nur das Zeugniß eines geringen Kenntnisses und weniger Uebung in der astronomischen Hauptheorie von den Centralkräften zu ihrem Gegenstand hat.

Einige

Einige Grundsätze der Theorie der Centralkräfte in Rücksicht auf die Astronomie.

1. §.

Der Satz, daß man eine jede Centralkraft, welche in sehr kleinen Zeitpuncten sich äußert, als eine einförmige Zunehmungs- oder Beschleunigungskraft annehmen könne, ist in der Theorie der Centralkräfte schon allgemein geworden. Wir wollen wegen eines vollkommnern Zusammenhangs und leichtern Begrifs des Nachfolgenden den Beweis dieses bekannten Theorems hier einrücken. Es sey (1. Fig.) APD eine Umkreislinie; P*p* soll davon einen unendlich kleinen Bogen vorstellen. PVNP sey endlich der küßende Zirkel. Weil man nun den unendlich kleinen Bogen eben aus der Ursache, daß er unendlich klein ist, als eine gerade Linie annehmen kann, so bekömmt man folgende Gleichung der Verhältniße: PE : PQ = PQ : PN; und hernach PH : P*p* = P*p* : PN. Hiemit ist $PQ^2 = PE.\ PN$; und $P\,p^2 =$ PH.

PH. PN. Deßwegen ist auch $PQ^2 : Pp^2 = PE : PH$. Aus der nämlichen Ursache, daß man Pp als unendlich klein annimmt, so kann man $QI = PE$ und $pi = PH$ betrachten; hiemit wird $PQ^2 : Pp^2 = QI : pi$. Man kann auch das QI zu pi und das QR zu pF als parallel annehmen: folglich würden die Dreyecke QIR und piF einander ähnlich seyn, und also ist $QR : pF = QI : pi$, aus welchem auch endlich die Analogie $QR : pF = PQ^2 : Pp^2$ fließt. Nun aber werden durch PQ und Pp die Zeitpuncte; durch QR aber und pF die Centralkräfte angezeiget. Weil also die Centralkraft in diesem Falle mit der Beschleunigungskraft die nämliche Analogie beybehält, so mag man diese für jene annehmen.

2. §.

Wenn wir durch f, durch S den Raum; durch t die Zeit anzeigen, so ist $f = \frac{S}{tt}$. Es ist aber der Raum oder $S = pF$; denn durch dieses wird die Bewegung durch die Centralkraft bis in p ausgedrückt; es ist also $f = \frac{pF}{tt}$; und, weil in der einförmigen Beschleunigungskraft $t = 1$, so wird $f = pF$.

3. §.

Die Zeiten sind wie die Summe der Sectorn oder der Dreyecke; hiemit ist auch t oder die Zeit für Pp = dem Dreyecke SpP oder SFP. Der Innhalt aber des ersten Dreyeckes ist $= SP \times pM$, des zweyten $= ST \times PF$; das ist = dem Factum der Grundlinien und ihrer Höhen. Wenn man nun in der vorher angesetzten Formel (2. §.) statt des t seinen Werth beybehält,

so

so bekömmt man $f = \frac{pF}{SP^2 . pM^2}$; oder auch $f = \frac{pF}{ST^2 . PF^2}$.

4. §.

Aus den Eigenschaften des Zirkels wissen wir, daß das Quadrat einer Tangente gleich sey dem Factum aus den Secanten. Es wird also $PF^2 = pF . pB$, und weil wir pP als unendlich klein angenommen haben (1. §.), so ist $pB = PV$; hiemit $pF = \frac{PF^2}{PV}$; dessen Werth, wenn wir selben in vorher gesetzter Formel (3. §.) einrücken, so wird $f = \frac{PF^2}{ST^2 . PV . PF^2} = \frac{1}{ST^2 . PV}$.

5. §.

Die zwey Dreyecke STP und PVN sind einander ähnlich; und also ist $SP : ST = 2PG : PV$; hiemit $PV = \frac{ST . 2PG}{SP}$; und $PV . ST^2 = \frac{ST^3 . 2PG}{SP}$, welchen Werth wir in die vorige Formel $f = \frac{1}{ST^2 . PV}$ (4. §.) übersetzen können, daß wir also $f = \frac{SP}{ST^3 . 2PG}$ überkommen.

6. §.

In der zwoten Figur kann man wegen der Aehnlichkeit der zweyen Dreyecke SPT und QPV folgende Proportion ansetzen:

$SP : ST = PQ : QV$, und also werden wir diese nämliche Analogie in $SP + PQ : ST + QV = SP : ST$; das ist in $2CA : 2CK$ (weil diese die mittere arithmetische Proportionallinie ist) $= SP : ST$ abändern können. Nun wissen wir aber aus der Lehre von den Kögelschnitten, daß in einer Ellipse $SP : ST = CA : CK$ (PD), wo denn wiederum das Factum bey den Durchmessern = dem Vierecke aus den halben Axen: und also $CA : PD = CN : CB$; deßwegen auch seyn wird $SP : ST = CN : CB$; folglich $ST = \frac{CB.SP}{CN}$. Wenn man ferner den halben Durchmesser des küssenden Zirkels in Betracht ziehet; so wird $PG = \frac{CN^2}{PD}$. Es ist aber aus der angesetzten Proportion das $PD = \frac{CA.CB}{CN}$: hiemit $PG = \frac{CN^2}{CA.CB}$. Setzen wir nun in der vorigen Formel (5. §.) statt des ST und PG ihren Werth, so bekommen wir das $f = \frac{CA}{SP^2, C^2B^2}$: es sind aber CA und CB unveränderliche Größen; hiemit wird $f = \frac{1}{SP^2}$. In einer Hyperbole also kann man die nach dem Brennpuncte gerichtete Centralkraft durch die Gleichung $f = \frac{1}{SP^2}$; das ist, durch das verkehrte Verhältniß des quadrirten Radius Vector am sichersten ausdrücken.

7. §.

Eben diese Gleichung nämlich $f = \frac{1}{SP^2}$ kann man auch in der Parabole ansetzen. Denn, wenn man in dem Dreyecke STH (3. Fig.) aus dem ersten Winkel eine senkrechte Linie AT herab-

herabfallen läßt, so ist $ST^2 = SA.SH$. Es ist aber $SH = SP$; hiemit $ST^2 = SA.SP$; und also auch $ST^6 = SA^3.SP^3$. So ist nun der Radius des küssenden PG in einer Parabole $= \frac{DP^3}{4AS^2}$. Weiters ist $DP = 2ST$ (denn es ist die Analogie $HP : PD = HT : TS$; überdas $HP = 2HT$; folglich ist $PG = \frac{8ST^3}{4AS^2}$; und $2PG = \frac{4ST^3}{AS^2}$. Deßwegen, wenn wir in der oben angeführten Formel $\frac{SP}{ST^3.2PG}$ (5. §.) den Werth von 2PG, nachmals den Werth von $4ST^6$ ansetzen, so wird $f = \frac{1}{4SP^2.AS}$, und nach weggelassenen unveränderlichen Größen ist $f = \frac{1}{SP^2}$; das ist, in der Parabole bekömmt man die nämliche Formel, welche wir vorher für die in einer Ellipse oder Hyperbole nach dem Brennpuncte gerichtete Centralkraft angeführt und bewiesen haben (6. §.).

8. §.

Wenn mehrere Körper mit ihren Centralkräften, welche nach einem gemeinen Brennpunct gerichtet sind; und durch die Formel $\frac{1}{SP^2}$ mögen ausgedrücket werden, (6. 7. §§.) in der Laufbahne Kögelschnitte beschreiben, so sind die Räume im Quadratwurzlichten Verhältnisse der Parameter. Denn, weil nach dem bekannten Ausdrucke π oder der Parameter $= \frac{2CB^2}{CA}$; und wir vorher $f = \frac{AC}{SP^2.CB^2}$ bekommen haben (6. §.), so wird $f =$

$\frac{1}{SP^2 . \pi}$. Wir haben aber schon oben bewiesen, daß $f = \frac{pF}{SP^2 . PM^2}$ (3. §.); hiemit $\frac{1}{SP^2 . \pi} = \frac{pF}{SP^2 PM^2}$. Nun ist weiters pF, durch welches die Centralkraft ausgedrücket wird (2. §.), dem $\frac{1}{SP^2}$ gleich (6. 7. §§.), folglich, wenn man diesen Werth dafür annimmt, so wird $\frac{PF}{\pi} = \frac{pF}{SP^2 . PM^2}$ und also $\pi = SP^2 . PM^2$; hernach $\surd \pi = SP . PM$. Es ist aber $SP . PM$ mit dem Raume oder Sector in einem Verhältnisse (3. §.): also auch $\surd \pi$ oder der quadratwurzlichte Parameter wie die Räume ꝛc.

9. §.

Die Geschwindigkeit läßt sich in einem unendlich kleinen Zeitraum durch Pp ausdrücken (1. §.). Weil nun die Dreyecke SPT und pMB einander ähnlich sind, so überkömmt man eine Analogie, nämlich $ST : SP = pM : pD$, wo $pP = \frac{SP . PM}{ST}$. Es ist aber $SP . PM = \surd \pi$: (§. 8.) folglich $pP = \frac{\surd \pi}{ST}$. Das ist: die Geschwindigkeit ist in einem geraden quadratwurzlichten Verhältniße des Parameter, und umgekehrten Verhältnisse des Perpendikels.

10. §.

Je weitläuftiger der Raum einer Ellipse, welchen wir s heißen wollen, ist; oder je kleinere Theile der bewegte Körper in seiner Laufbahne beschreibet, um so größer ist die Zeit des Umlaufes; das ist $t = \frac{a}{s}$. Nun sind aber die Räume oder S mit $\surd \pi$

in

inem Verhältnisse (§. 8.), so ist also auch $t = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$ und $a = \sqrt{\pi}$. Es stehet also a oder die Größe des Raums ei- Ellipse in einem Verhältnisse, welches aus dem quadratwurz- en Verhältnisse des Parameters der größern Axe und der ein- en Zeit von dem ganzen Umlaufe zusammengesetzet ist.

11. §.

Es sey in einer Ellipse die kleinere Axe $= b$, die größere t Hauptaxe $= d$; der Parameter von dieser sey $= \pi$. Aus Theorie der Kegelschnitte wissen wir, daß $d\pi = b^2$, hiemit ganze Gleichung durch d^2 multipliciret giebt $d^3\pi = b^2 d^2$. Es nun die Größe des Raums in einer Ellipse wie ein anderes eck; das ist: $a = bd$. Wir haben aber erst gleich oben 10.) gesehen, daß $a = t\sqrt{\pi}$: so ist nun auch $bd = t\sqrt{\pi}$ $b^2 d^2 = t^2\pi$: und, wie wir jetzt gesagt haben, so ist $b^2 d^2 = \pi$; deßwegen ist nach geschehener Einschaltung des Werths $b^2 d$ klar, daß $d^3\pi = t^2\pi$, und also $d^3 = t^2$, oder $t = \sqrt{d^3}$. einer Ellipse verhält sich also die periodische Zeit, wie die Qua- twurzel des Cubus von der größeren Axe.

12. §.

Aus diesem nun lassen sich die Verhältnisse für die wahren rchmesser, für die Fläche und körperlichen Innhalt der Plane- bestimmen, welche wir, weil sie ohnedem sehr bekannt sind, glassen wollen.

13. §.

Damit ein Körper bey abwachsender Centralkraft die mliche Ellipse beschreibe, so muß die Linie der beyden Apsiden

$\frac{1}{SP^2 . \pi}$. Wir haben aber schon oben bewiesen, daß $f = \frac{pF}{SP^2 . PM^2}$ (3. §.); hiemit $\frac{1}{SP^2 . \pi} = \frac{pF}{SP^2 PM^2}$. Nun ist weiters pF, durch welches die Centralkraft ausgedrücket wird (2. §.), dem $\frac{1}{SP^2}$ gleich (6. 7. §§.), folglich, wenn man diesen Werth dafür annimmt, so wird $\frac{PF}{\pi} = \frac{pF}{SP^2 . PM^2}$ und also $\pi = SP^2 . PM^2$; hernach $\surd \pi = SP . PM$. Es ist aber $SP . PM$ mit dem Raume oder Sector in einem Verhältnisse (3. §.): also auch $\surd \pi$ oder der quadratwurzlichte Parameter wie die Räume ꝛc.

9. §.

Die Geschwindigkeit läßt sich in einem unendlich kleinen Zeitraum durch Pp ausdrücken (1. §.). Weil nun die Dreyecke SPT und pMB einander ähnlich sind, so überkömmt man eine Analogie, nämlich $ST : SP = pM : pD$, wo $pP = \frac{SP . PM}{ST}$. Es ist aber $SP . PM = \surd \pi$: (§. 8.) folglich $pP = \frac{\surd \pi}{ST}$. Das ist: die Geschwindigkeit ist in einem geraden quadratwurzlichten Verhältniße des Parameter, und umgekehrten Verhältnisse des Perpendikels.

10. §.

Je weitläuftiger der Raum einer Ellipse, welchen wir s heißen wollen, ist; oder je kleinere Theile der bewegte Körper in seiner Laufbahne beschreibet, um so größer ist die Zeit des Umlaufes; das ist $t = \frac{a}{s}$. Nun sind aber die Räume oder S mit $\surd \pi$

in

nach demjenigen Theil, in welchem der Körper sich beweget, gewendet werden. Hingegen, wenn die Centralkraft anwächst, so richtet sich die Apsiden Linie nach dem gegenseitigen Theile.

14. §.

Man wird auch ganz leicht begreifen, daß in einem Zirkel, in dessen Mittelpuncte die Centralkraft überall die nämliche ist, und also ein solcher Zirkel keinen anderen küssenden als sich selbst hat, alle SP, ST seyn = 1, und also auch $f = 1$.

15. §.

Wenn man hingegen den Mittelpunct der Kräfte außer den Mittelpunct eines Zirkels z. E. in S ansetzet (Fig. IV.), und annimmt, daß der Körper in P sey, und einen unendlich kleinen Bogen PQ beschreibe, so werden wir aus der vorigen Formel $f = \frac{pF}{ST^2 . PM^2}$ (§. 3.) für diesen Fall $f = \frac{PR}{ST^2 . PQ^2}$ überkomen. Nun wird aus der Theorie für die Eigenschaften des Zirkels bewiesen, daß $PQ^2 = PO \times PB$. Es ist aber auch wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke PQR und PVB ausgemacht, daß $PO : PR = PV : PB$, und also $PO = \frac{PR . PV}{PB}$: Deßwegen rücke man diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung ein, so erhält man $PQ^2 = \frac{PR . PV . PB}{PB} = PR . PV$. Diesen Werth des PQ^2, wenn man ihn in der allgemeinen Formel ansetzet, so bekömmt man $f = \frac{PR}{ST^2 . PR . PV} = \frac{1}{ST^2 . PV}$. Ferner sieht man, daß die Dreyecke PBV und STP sich ähnlich sind (denn den Winkel $\angle PT$ mißt der halbe Bogen PV, welcher gleichfalls

das

das Maaß des Winkels VBP iſt; wie auch ſind die Winkel bey T und V = 90°): hiemit iſt PB: PV = SP: ST; und alſo $ST^2 = \frac{PV^2 . SP^2}{PB^2}$, welcher Werth die vorige Formel in $f = \frac{PB^2}{PV^2 . PV . SP^2}$ verwandelt: und weil PB eine unveränderliche Größe anzeiget, ſo wird $f = \frac{1}{PV^3 . SP^2}$; oder dieſe Formel mit Worten auszudrücken, ſo iſt die Centralkraft, wenn ſelbe außer den Mittelpunct eines Zirkels angeſetzet wird, allzeit in dem umgekehrten Verhältniſſe, welches aus dem Cubus der Sehne, ſo durch den Mittelpunct der Kraft und die Lage des Körpers gezogen wird, und aus dem Quadrat des Radius Vector zuſammengeſetzet iſt.

16. §.

Will man nun wiſſen, was für eine Größe oder wie viel Theile des Durchmeſſers ein Körper, welcher aus A (Fig. V.) vermög ſeiner natürlichen Schwere herabfällt, beſchreibe, auf daß er jene Geſchwindigkeit überkomme, welche ihm nöthig iſt, einen halben Umkreis des Zirkels zu durchlaufen, ſo ſetze man vor allem den Bogen AM als unendlich klein, und alſo als eine gerade Linie an. Wenn man nun die Abſeiſſe AP annimmt, daß ſie der Centralkraft gleichkömmt, und daß AP in dem nämlichen Zeitraum beſchrieben wird, in welchem der Körper den Bogen AM durchläuft, ſo iſt AP: AM = AM: AB: und alſo $AP = \frac{AM^2}{AB}$.

Man ſetze nun ferner, daß der Körper in einer einförmig zunehmenden Bewegung weiters in L herabfalle, hiemit auch indeſſen mit einer gleichförmigen Bewegung in dem Zirkel bis in Q fortrücke, ſo wird man (wenn AM und AQ die Zeit ausdrücken) eine neue

Ana-

Analogie $AP : AL = \frac{AM^2}{AB} : \frac{AQ^2}{AB}$ bekommen. Man kann nun diese in $AP : \frac{AM^2}{AB} = AL : \frac{AQ^2}{AB}$ verändern. Wir haben aber allererst bewiesen, daß $AP = \frac{AM^2}{AB}$; es ist also auch $AL = \frac{AQ^2}{AB}$. Weil aber AQ im Ende seiner Geschwindigkeit mit einer gleichförmigen Bewegung, AL mit einer beständig zunehmenden ist beschrieben worden, so ist $AQ = 2AL$, und $AQ^2 = 4AL^2$. Deßwegen, wenn man diesen Werth in der Gleichung $AL = \frac{AQ^2}{AB}$ für AQ^2 ansetzt, so bekömmt man endlich $AL = \frac{4AL^2}{AB}$, und $AL . AB = 4AL^2$; nachmals $AB = 4AL$, und endlich $AB = 4AL$, wie auch $AL = \frac{1}{4}AB$. Das Maaß der Geschwindigkeit also ist in diesem Falle ein halber Radius oder der vierte Theil von einem Durchmesser.

17. §.

Suchen wir einen allgemeinen Ausdruck oder Formel für die Centralkraft, wenn der Mittelpunct der Kräfte in den Mittelpunct einer Ellipse, nämlich in S (VI. Fig.) gesetzt wird, so müssen wir wiederum die Formel $f = \frac{SP}{ST^3 . 2PG}$ (5. §.) für uns nehmen, und weil 2PG oder das zweyfältige des halben Durchmessers des küssenden Zirkels ist $= \frac{2SD^2}{ST}$, so bekommen wir $f = \frac{SP . ST}{ST^3 . 2SD^2} = \frac{SP}{ST^2 . 2SD^2}$. Aus der Theorie der Kögelschnitte kann man ferner in einer Ellipse die Analogie $SD . ST = SB . SA$

gebrauchen, wo $SD^2 = \frac{SB^2 . SA^2}{ST^2}$; deßwegen wird $f = \frac{SP . ST^2}{ST^2 . 2SB^2 . SA^2} = \frac{SP}{2SB^2 . SA^2}$: es ſind aber SB und SA unveränderliche Größen, deßwegen bleibt $f = SP$.

18. §.

Das Verhältniß der periodiſchen Zeit in einer Ellipſe zu einem Zirkel zu finden, ſo wollen wir (7. Fig.) für den Zirkel die Größe des Raumes $= A$, für die Ellipſe aber $= a$; den Sector $AMS = S$, den andern Sector $ANS = s$; die Zeit für den Zirkel $= T$; für die Ellipſe $= t$ annehmen. Nun ſind die Perioden der Zeit in dem geraden Verhältniſſe der Räume und in dem umgekehrten der Zeiten; hiemit $T \cdot t = \frac{A}{S} : \frac{a}{s}$. Weiters hält der Raum eines Zirkels zu der Größe eines elliptiſchen Raumes eben das Verhältniß, welches die groſſe oder Hauptaxe zu der kleinern Axe beybehält; das iſt: $A : a = SD : SG$. Deßwegen wird die vorige Proportion durch Unterſchiebung des Werthes in $T : t = \frac{SD}{S} : \frac{SG}{S}$ verwandelt. Es ſind aber auch die Sectores wie die Größen der Räume; und dieſe wie die Axen: ſo iſt denn auch $S : s = SD : SG$; oder nach dafür angeſetztem Werthe wird $T . t = \frac{SD}{SD} : \frac{SG}{SG}$ das iſt $T : t = 1 : 1$, hiemit $T = t$.

19. §.

Wenn ein Körper aus dem oberſten Puncte der Apſidenlinie in die *b* geſetzt wird, ſo iſt die Geſchwindigkeit in einer Ellipſe, wo der Mittelpunct der Kräfte in S iſt, nicht ſo groß, als

selbe ist in einem Zirkel, welchen man aus dem Mittelpuncte S durch den Radius AS (8. Fig.) beschreibet. Dieses zu beweisen, so nehmen wir AP zur Abscisse an, und ziehen wir zur selben die Ordinaten PN, PM. Es ist nun richtig, daß AN und AM zur nämlichen Zeit beschrieben werden, in welcher der Körper durch AP sich beweget. Gleichwie nun AP = AP, so ist auch AN = AM, wenn sie sich nämlich auf die Zeit beziehen. Allein, obschon AP oder die Centralkraft beständig die nämliche ist, so ist doch in sich selbst AM > AN: die Ungleichheit also der Geschwindigkeit muß sich auf die Tangentialkraft gründen. Daß aber M über das N hinaus fallen muß, ist die Ursache, weil der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels dem Quadrate des conjugirten Diameters, welcher in diesem Falle die halbe kleinere Axe ist, gleichet, welches Quadrat man hernach mit der senkrechten Linie, dessen Stelle die halbe größere Axe vertritt, muß getheilet werden. Es ist also $2PG = \frac{b^2}{a}$: aber auch $\frac{1}{2}\pi$ ist $= \frac{b^2}{a}$ (11 §.): folglich ist der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels im Scheitelpuncte dem halben Parameter gleich: es ist aber $\frac{1}{2}\pi < AS$, denn $\frac{1}{2}\pi = PN$, welches ja kleiner ist als die halbe kleinere Axe, und folglich noch viel kleiner als die halbe größere Axe, hiemit auch $PN < AS$: der ganze Zirkel also fällt für die Ellipse hinaus.

20. §.

Wird ein Körper aus dem untersten Puncte der Apsidenlinie zur Bewegung hingerissen, so ist die Geschwindigkeit in einer Ellipse, wo der Mittelpunct der Kräfte in S gesetzet wird, größer als die Geschwindigkeit in einem Zirkel, welcher aus dem Mittelpuncte S durch den Radius AS beschrieben wird (9. Fig.). Denn, wenn man wiederum AP für die Abscisse nimmt, so werden

den die Bögen AM und AN in der nämlichen Zeit durchgelaufen: weil aber AN > AM, so muß in der Ellipse eine größere Geschwindigkeit seyn. Die Centralkraft bleibt aber die nämliche, also ist davon der Unterschied von der Tangentialkraft herzuleiten. Hiemit ist in einer Ellipse die Tangentialkraft größer als in einem Zirkel. Weiters fällt der ganze Zirkel in den Raum der Ellipse; denn, wie wir erst oben (§. 19.) gesagt haben, so ist $\frac{1}{2}\pi$ = dem halben Durchmesser des küssenden Zirkels; hernach ist $\frac{1}{2}\pi$ in diesem Falle grösser als AS, und eine halbe Axe ist auch größer als der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels: deßwegen wird der küssende Zirkel niemals die Ellipse berühren, viel minder über selbe hinaus fallen können.

21. §.

In dem Falle, daß die Centralkraft die nämliche sey, und der Körper aus dem untersten Punct der Apsidenlinie zur Bewegung hingerissen werde, so läßt sich fragen, in welchem Kegelschnitte die Geschwindigkeit größer sey. Diese Frage zu erörtern sey (Fig. 10.) A der unterste Punct in der Apsidenlinie und zugleich der Scheitelpunct für die Kegelschnitte, welche sollen beschrieben werden; S sey der Mittelpunct der Kräfte. Man nehme nun den Punct P, wo AP die Centralkraft ausdrücket, und richte daselbst die Ordinate PL auf. In A ziehe man eine Tangente AQ = AS. Aus der Beschreibung der Kegelschnitte, und aus ihren Eigenschaften wissen wir, daß in der Parabole AS gleich sey dem Abstande der Leiterin (Linea directrix) von dem conischen Scheitelpuncte. In der Ellipse ist aber dieser Abstand der Leiterin größer, und in der Hyperbole kleiner als AS. Deßwegen, wenn ich außer dem A eine Linie AR nehme, und noch vorher AS in A *b* übersetze; nachmals zwischen A und *b* den Punct B;

und endlich außer dem *b* den Punct β anmerke, so ist es richtig, daß in B die Leiterin der Hyperbole, in *b* die Leiterin der Parabole, in β die Leiterin der Ellipse anzutreffen sey. Ziehe man nun aus diesen Puncten durch Q die Tangenten, so wird die Tangens der Ellipse in der Ordinate PL den kleinsten Theil, die Tangens der Parabole einen größeren, die Tangens der Hyperbole den größten Theil abschneiden. Die Ordinaten aber drücken die Tangentialkraft aus; deßwegen, weil man angenommen hat, daß die Centralkraft die nämliche sey, so wird in der Hyperbole die größte, in der Parabole eine mindere, in der Ellipse endlich die kleinste Geschwindigkeit oder Tangentialkraft seyn.

22. §.

Eben dieses kann man aus der Beschreibungsforme der Kegelschnitte herleiten. Es sey (Fig. XI.) z. B. M. N. eine unbestimmte Linie. In S setze man den Brennpunct der Kegelschnitte, also zwar, daß selbe die Linie M N in P berühren. Nun wird S P den Radius vector oder die Centralkraft für alle als gleich ausdrücken. Man lasse weiters aus S in M N eine senkrechte Linie S T herab fallen, und man ziehe eine ihr gleiche T K, wie auch aus K durch P eine andere unbestimmte. Nun wird man in dieser alle Brennpuncte der Kegelschnitte antreffen, welche nämlich also beschrieben werden, daß sie ihren Brennpunct in *S* haben und die Linie M N in P berühren. Denn nehme man in selber einmal einen Punct F, so wird K F die Axe; S F der Abstand der zween Brennpuncte. Theilen wir S F in C in gleiche Größen, so bekommen wir in C den Mittelpunct der Ellipse. Schneide man hernach K F entzwey und übersetze man sie aus C über das S und F hinaus, so bekömmt man die Axe A B, und die Ellipse A P F. Nimmt man ferner F in einem unendlich grossen Abstande an, oder zieht man durch S eine

Pa-

Parallele zu K F, welche nämlich in einem unendlich entfernten Abſtande ſich mit K F vereiniget, ſo bekömmt man durch G S die Lage einer Parabole; und, wenn man aus K auf dieſelbe eine ſenkrechte Linie K G herabfallen läßt, ſo wird dieſe die Leiterin ſeyn; da hingegen die Linie G S, wenn man ſie entzwey ſchneidet, den Scheitelpunct a beſtimmet, und die Parabole in P berühret wird. Wenn man endlich in der nämlichen Linie auſſer K einen Punct Φ annimmt, und dieſen mit S vereiniget, ſo wird Φ S die Lage der Axe und Φ K die Axe, welche, wenn ſie in S Φ, ſo vorher ſchon in C entzwey geſchnitten wird, auf beyde Seiten in a und a überſetzt iſt worden, ſo wird a den Scheitelpunct anmerken; und die Hyperbole in P berühret werden. Wir haben nun ſchon vorher das Verhältniß der Geſchwindigkeit, welche wir jetzt V heißen wollen, durch eine Formel angezeigt (§. 9.); nämlich $V = \frac{\sqrt{\pi}}{ST}$, und weil S T in dieſem Falle unveränderlich iſt, ſo wird $V = \sqrt{\pi}$ oder $V^2 \pi$. Es iſt aber nach den bekannten Gleichungen der Kegelſchnitte in einer Ellipſe der $\frac{1}{2}\pi = \frac{2ac - c^2}{a}$; in der Parabole $\frac{1}{2}\pi = 2c'$; in der Hyperbole $\frac{1}{2}\pi = 2ac + c^2$, deßwegen, wenn wir dieſe Gleichungen in Analogien auflöſen, ſo bekommen wir I. $a : 2a - c = c : \frac{1}{2}\pi$, wo $2a - c < 2a$, hiemit auch $\frac{1}{2}\pi < 2c$. II. $\frac{1}{2}\pi = 2c$. III. $a : 2a + c = c : \frac{1}{2}\pi$, wo $2a + c > 2a$, und alſo auch $\frac{1}{2}\pi > 2c$. Folglich iſt $\frac{1}{2}\pi$ in der Hyperbole am größten, in der Parabole nicht ſo groß, in der Ellipſe aber kleiner: Wir haben aber gleich jetzt geſagt, daß die Geſchwindigkeit oder $V^2 = \pi$; hiemit iſt auch dieſe oder die Tangentialkraft in einer Hyperbole die größte, in einer Parabole minder groß, und in der Ellipſe am kleinſten.

23. §.

Erster Lehnsatz.

Wenn man in einer Ellipse oder Hyperbole (12. und 13. Fig.) durch den Mittelpunct C eine Linie ziehet, also zwar, daß selbe zu der Tangente T M X parallel sey, so wird sie zwischen E *s* und M einen Theil der geraden Linie F M (12. Fig.) oder *f* M (13. Fig.) einschlieſſen, welcher der halben Hauptaxe gleich kömmt. Es sey also in der Ellipse (12. Fig.) die Linie K C D zu der Tangente X T parallel. Man vereinige das M mit *f* und F, und ziehe überdas eine senkrechte Linie M N, welcher in O eine andere *f* Q zu K D und T X parallel entgegen läuft. Weil nun *f* M T = X M Q, und M *f* O = M Q O, wie auch Q M O = O M *f*, so sind die Dreyecke Q O M, *f* O M einander ähnlich und gleich: und deßwegen wird auch M *f* = M Q. Es ist aber F M + M *f* = S *s* oder der Hauptaxe gleich; weiters, weil F C = C *f* und C E zu *f* Q parallel ist, so folget, daß F E = E Q. Deßwegen ist E Q die Semidifferenz zwischen M *f* oder M Q und M F, welche also, wenn man sie zur Q M hinzusetzet, die halbe Summe der geraden Linien F M und M *f* ausmachen.

In der 13. Fig. sey C Q zu X T parallel. Ziehe man nun durch F und M eine unbestimmte Linie, welche in Q und H den geraden und zu X T parallelen Linien C Q und F H entgegen kömmt. Die unter sich gleiche Winkel T M H, X M *f* sind auch ihren abwechselnden gleich, nämlich = M H *f*, M *f* H; so ist denn auch *f* M = M H. Hernach, weil *f* C = C F, so ist auch H Q = Q F. Es ist aber *f* M — F M = *s* S und $\frac{1}{2}$ *f* M (oder $\frac{1}{2}$ H M) — $\frac{1}{2}$ F M = C S; das ist $\frac{1}{2}$ H M — $\frac{1}{2}$ F M = $\frac{1}{2}$ H Q + $\frac{1}{2}$ Q M — $\frac{1}{2}$ F M =

$\frac{1}{2}$ F

$FQ + \frac{1}{2}QM - \frac{1}{2}FM = \frac{1}{2}QM + \frac{1}{2}MF + \frac{1}{2}QM - \frac{1}{2}FM$
$QM = CS$. Weil aber EQ zu fH parallel ist, und $Mf = H$, so ist auch $QM = EM$.

24. §.

Wenn man die vorige Construction der zwölften und dreyzehenden Figur beybehält, (23. §.) so kann man gleichfalls zeigen, daß $MNXMR$ dem CL^2 gleiche. Denn sowohl in der Ellipse als Hyperbole ist $CV \times CX = CL^2$. Ziehet man nun aus dem Mittelpuncte C zur Tangente XF eine senkrechte Linie CI, so sind die Dreyecke CIX und MPN einander ähnlich. Deßwegen kömmt man $CI : CX = MP : MN$. Es ist aber $CI = MR$, und $MP = CV$: wenn man also diese dafür ansetzet, so wird $MR : CX = CV : MN$, und also $MR \times MN = CX \times CV = CL^2$.

25. §.

Zweyter Lehnsatz.

Wenn aus dem Intersectionspuncte N, wo die Normallinie und die Axe des Kögelschnittes zusammen stossen, die zu M senkrechte Linie NB gezogen wird, so ist MB dem halben Parameter gleich. Denn in der Ellipse (12. Fig.) sind die Dreyecke NBM, EMR, welche bey B und R einen rechten Winkel haben, wegen den bey M gemeinschaftlichen Winkel einander ähnlich.

) Es verstehet sich von selbst, daß die Parallele zur Tangente, welche durch den Mittelpunct gezogen ist, ein conjugirter Durchmesser derjenigen Linie sey, welche man durch den Berührungspunct gezogen hat.

23. §.

Erster Lehnsatz.

Wenn man in einer Ellipse oder Hyperbole (12. und 13. Fig.) durch den Mittelpunct C eine Linie ziehet, also zwar, daß selbe zu der Tangente T M X parallel sey, so wird sie zwischen E s und M einen Theil der geraden Linie F M (12. Fig.) oder *f* M (13. Fig.) einschliessen, welcher der halben Hauptaxe gleichkömmt. Es sey also in der Ellipse (12. Fig.) die Linie K C D zu der Tangente X T parallel. Man vereinige das M mit *f* und F, und ziehe überdas eine senkrechte Linie M N, welcher in O eine andere *f* Q zu K D und T X parallel entgegen läuft. Weil nun *f* M T = X M Q, und M *f* O = M Q O, wie auch Q M O = O M *f*, so sind die Dreyecke Q O M, *f* O M einander ähnlich und gleich: und deßwegen wird auch M *f* = M Q. Es ist aber F M + M *f* = S *s* oder der Hauptaxe gleich; weiters, weil F C = C *f* und C E zu *f* Q parallel ist, so folget, daß F E = E Q. Deßwegen ist E Q die Semidifferenz zwischen M *f* oder M Q und M F, welche also, wenn man sie zur Q M hinzusetzet, die halbe Summe der geraden Linien F M und M *f* ausmachen.

In der 13. Fig. sey C Q zu X T parallel. Ziehe man nun durch F und M eine unbestimmte Linie, welche in Q und H den geraden und zu X T parallelen Linien C Q und F H entgegen kömmt. Die unter sich gleiche Winkel T M H, X M *f* sind auch ihren abwechselnden gleich, nämlich = M H *f*, M *f* H; so ist denn auch *f* M = M H. Hernach, weil *f* C = C F, so ist auch H Q = Q F. Es ist aber *f* M — F M = *s* S und $\frac{1}{2}$ *f* M (oder $\frac{1}{2}$ H M) — $\frac{1}{2}$ F M = C S; das ist $\frac{1}{2}$ H M — $\frac{1}{2}$ F M = $\frac{1}{2}$ H Q + $\frac{1}{2}$ Q M — $\frac{1}{2}$ F M =

$\frac{1}{2}$ F

$\frac{1}{2}FQ + \frac{1}{2}QM - \frac{1}{2}FM = \frac{1}{2}QM + \frac{1}{2}MF + \frac{1}{2}QM - \frac{1}{2}FM = QM = CS$. Weil aber EQ zu fH parallel ist, und $Mf = MH$, so ist auch $QM = EM$.

24. §.

Wenn man die vorige Construction der zwölften und dreyzehenden Figur beybehält, (23. §.) so kann man gleichfalls zeigen, daß $MNXMR$ dem CL^2 gleiche. Denn sowohl in der Ellipse als Hyperbole ist $CV \times CX = CL^2$. Ziehet man nun aus dem Mittelpuncte C zur Tangente XF eine senkrechte Linie CI, so sind die Dreyecke CIX und MPN einander ähnlich. Deßwegen bekömmt man $CI : CX = MP : MN$. Es ist aber $CI = MR$, und $MP = CV$: wenn man also diese dafür ansetzet, so wird $MR : CX = CV : MN$, und also $MR \times MN = CX \times CV = CL^2$.

25. §.

Zweyter Lehnsatz.

Wenn aus dem Intersectionspuncte N, wo die Normallinie und die Axe des Kögelschnittes zusammen stossen, die zu FM senkrechte Linie NB gezogen wird, so ist MB dem halben Parameter gleich. Denn in der Ellipse (12. Fig.) sind die Dreyecke NBM, EMR, welche bey B und R einen rechten Winkel haben, wegen den bey M gemeinschaftlichen Winkel einander ähnlich.

*) Es verstehet sich von selbst, daß die Parallele zur Tangente, welche durch den Mittelpunct gezogen ist, ein conjugirter Durchmesser derjenigen Linie sey, welche man durch den Berührungspunct gezogen hat.

lich. Deßwegen ist MB : MN = MR : ME oder CS (23. §.): folglich CS × MB = MN × MR = CL^2 (25. §.). Wenn man nun den halben Parameter, als die zu CS und CL beständige dritte Proportionallinie, L heißt, so ist auch $CS \times L = CL^2$, hiemit CS × MB = CS × L oder MB = L.

In der Hyperbole (13. Fig.) sind sich die Dreyecke MRQ und MBN wegen gleichen Winkeln bey der Spitze M, und den rechten Winkeln bey R und B ähnlich. Deßwegen ist RM : MQ (oder CS 23. §.) = MB : MN, wo wir denn wiederum bekommen RM × MN = CL^2 (25. §.) = BM × CS; und, wenn der halbe Parameter L genennet wird, so wird wie vorher L = BM.

Für die Parabole (14. Fig.) ist dieses wohl sehr leicht zu beweisen. Denn daselbst ist allzeit FM = FN: und, weil bey F der gemeinschaftliche Winkel ist, wie auch bey P und B rechte Winkeln anzutreffen, so sind auch die Dreyecke FMP und FNB einander ähnlich und gleich; folglich FP = FB. Deßwegen, wenn man gleiche Größen von gleichen wegnimmt, so verbleibt PN = BM. Es ist aber aus der Lehre von Kögelschnitten sehr bekannt, daß in einer Parabole PN oder die Subnormal dem halben Parameter gleiche: so ist denn auch demselben die Linie BM gleich.

26. §.

Aus dem gesagten kann man wohl ganz leicht eine Methode finden, den halben Durchmesser des küssenden Zirkels zu bestimmen, wenn die Normale und der Brennpunct in einem Kegelschnitte gegeben sind; oder auch die Normale zu finden, wenn man den halben Durchmesser des küssenden Zirkels, und die Sehne, welche durch den Brennpunct geht, vorher weis. Denn die Normale

fällt

fällt nothwendig auf den halben Durchmesser des küssenden Winkels, weil alle beyde in dem nämlichen Punct M (Fig. XV.) zur Tangente MQ senkrechte Linien sind, und der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels in allen Kegelschnitten um den Cubus der Normallinie, welcher mit dem Quadrate des halben Parameters dividirt wird, gleich ist. Es sey also nach dem gegebenen Beweise MB der halbe Parameter (§. 24.), so wird auch $MC = \frac{MN^3}{MB^2}$: hiemit $MB^2 : MN^2 = MN : MC$; oder, wenn man aus N zu MC eine senkrechte Linie aufrichtet, welche in L der geraden Linie FM entgegen kömmt, so ist die Analogie BM: MN = MN: ML, und also auch $MB^2 : MN^2 = MB : ML$ oder MB: ML = MN: MC. Weil nun bey B und deßwegen auch bey L ein rechter Winkel ist, so ist es nicht möglich, daß MC ein halber Durchmesser des Zirkels sey, außer es ist $ML = \frac{1}{2}MV$. Man findet also aus dieser Proportion und Construction sowohl den halben Durchmesser des küssenden Winkels, als auch die halbe Sehne ML, welche durch den Brennpunct F gezogen ist.

27. §.

Im Gegentheil giebt man den halben Durchmesser des küssenden Zirkels, und den Brennpunct des Kegelschnittes so findet man die Normale MN. Denn, wenn MC und der Punct F bekannt sind, so weis man auch das MV und ML. Es sind aber die Dreyecke MBN und MLC einander ähnlich: deßwegen, weil $BM^2 : MN^2 = MN : MC$, so ist auch $ML^2 : MC^2 = MN : MC$; und also $MN = \frac{ML^2}{MC}$. Man darf jetzt nichts anders thun, als daß man aus L zu MC eine senkrechte Linie LN herabfallen läßt, welche sodann die gesuchte Normallinie MN bestimmen wird.

28. §.

Dritter Lehnsatz.

Wenn man eine Sehne MV (Fig. XV. XVI. XVII. XVIII.) in D also theilet, daß $MD = \frac{1}{4} MV = \frac{1}{2} ML$, hernach das D mit N vereiniget, so wird die Linie DN zu M*f*, welche durch den andern Brennpunct gezogen ist, parallele seyn. Denn den Winkel FM*f* schneidet die Normale MN in jedem Kegelschnitte in zween gleiche Theile, wenn nämlich in der Hyperbole auch der äußere Winkel oder DM Φ (Fig. XVII.) in Betracht gezogen wird. Es ist also DMN = NM*f*, oder in der Hyperbole = NM Φ. Hernach, weil LN zu MN senkrecht ist, und LD = DM, so ist auch DN = DM und DMN = DMN = NM*f*; das ist, DN, M*f* (oder M Φ) sind gleichlaufende Linien.

29. §.

Wir bekommen also in einer Ellipse (Fig. XV. XVI.) die Analogie FD : DN = FM : M*f*; das ist, FD : DM = FM : M*f*; und, wenn wir zusammen setzen, so ist FD : FD + DM (= FM) = FM : FM + M*f* (= *fS*). Deßwegen, im Falle wir das FM (Fig. XVI.) weiter hinausziehen, oder verlängern, daß nämlich sey FD : FM = FM : FE, und, wenn man hernach aus E die senkrechte Linie EQ, welche auf die Tangente herabfällt, verlängeret, bis nämlich EQ = Q*f*, so wird *f* der andere Brennpunct, durch welchen die verlängerte *f*N gehet, denn aus eben der Ursache wird ME = M*f* und FE = *Sf*.

30. §.

In einer Hyperbole (Fig. XVII.) liegt F, wenn man selbes auf das M beziehet, oder den D. Doch bekömmt man wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke DFN und FM*f* die Analogie DF: DN (oder DM) = FM: M*f*: und abgetheilter ist DF: DM — DF (FM) = FM: M*f* — FM (S*s*). Wenn man also in der geraden Linie MV auf der Seite, wo das D ist, das FE nimmt, daß nämlich DF: FM = FM: FE; wenn man hernach die aus E in MQ herabgelassene senkrechte Linie EQ hinausziehet, bis EQ = Q*f*, so bekömmt man das *f*, und also die transverse Axe FE = S*s*.

31. §.

In der Parabole ist M*f* = ∞. Wenn man nun annimmt, daß FD: FM = FM: ∞ (Fig. XVIII.), so folgt nothwendig, daß sich FD verliehren muß, weil ∞ : FM = FM: *o*: deßwegen fließen die zween Puncte F und D zusammen; doch kann man den Scheitelpunct einer Parabole leicht bestimmen, wenn man aus M eine senkrechte Linie MP auf die hinaus gezogene Linie FN herabfallen läßt, und die Subtangens PT in S in zween Theile schneidet.

32. §.

Hier läßt sich zugleich eine allgemeine Folgerung machen, daß, wenn F unter dem D liegt, der Kegelschnitt eine Ellipse sey (Fig. XV. XVI.); fließt aber F mit D zusammen, so ist selber eine Parabole (Fig. XVIII.). Liegt endlich das F ober dem D, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbole (Fig. XVII.). Denn im ersten Falle ist MFN < MDN; folglich müssen FN und M*f* zusammenstossen, und zwar auf der Seite N, welche sich gegen die Tangente MQ wendet. Im zweyten Falle ist es klar, daß sie nir-

gends einander begegnen. Aber im dritten Falle (Fig. VII.) ist MFN > MDN, hiemit stossen die zwo Linien NF und M*f* auf der Seite F zusammen, welche die Gegenseite der Tangente MQ ist. Nun dann im ersten Falle sind die Brennpuncte auf der nämlichen Seite der Tangeute, welches sich bey einer Ellipse äußert. Im zweyten Falle hat der eine von den Brennpuncten einen unendlich entfernten Abstand, welches der Parabole eigen ist. In dem dritten Falle sind die Brennpuncte auf den verschiedenen Theilen der Tangente anzutreffen, welches aber nur von der Hyperbole kann verstanden werden.

33. §.

Dieses alles, was wir vom 23. §. bis auf den gegenwärtigen Absatz gesagt haben, mußten wir voraus setzen, um die nachfolgenden Sätze von der Theorie der Centralkräfte ächt aufgeklärt einzusehen, und gründlich zu beweisen. Es gehören aber selbe meistens zur richtigen Bestimmung der Laufbahne eines Planeten; wie auch die Geschwindigkeit eines Körpers zu bestimmen, mit welcher derselbe nach der gegebenen Richtung muß hingerissen werden, damit er um den gegebenen Mittelpunct der Kräfte einen Kegelschnitt beschreibe, welchen man nämlich aus dem halben Durchmesser des küssenden Winkels und aus der Sehne, welche man durch den Mittelpunct der Kräfte ziehet, finden kann; oder auch daß man die Lage und die Größe des zu beschreibenden Kegelschnittes bestimmen kann, wenn die Geschwindigkeit und die Richtung eines durch die Bewegung hingerissenen Körpers gegeben sind. Man setzt aber hier allzeit im voraus als bekannt, daß die Centralkräfte in einem gezweyfältigten umgekehrten Verhältnisse, Ratio duplicata reciproca, der Abstände wirken.

34. §.

Es sey (XV. Fig.) ein küssender Zirkel, welcher seinen Durchschnitt in M hat. Der Mittelpunct der Kräfte sey F; die Richtung der mitgetheilten Kraft sey MP. Endlich die Sehne MV solle durch F gehen. Setze man nun, daß der Körper in M schon jene Geschwindigkeit inne hätte, welche er doch erst bekommen würde, wenn er durch MD herab fiele. Nun wird selber zu der nämlichen Zeit, wo er mit einer einförmigen Kraft die Linie MD beschreibet, das zweyfache davon, nämlich ML beschreiben, im Falle seine Bewegung eine einförmig zunehmende oder beschleunigende wäre. Gleichfalls, da der Körper, im Falle er durch die nämliche Geschwindigkeit dahin gerissen würde, mit einer gleichförmigen Bewegung die Linie MP beschreibt, so würde er mit einer gleichförmig zunehmenden Bewegung die Linie PR durchlaufen; es haben aber die Räume, welche bey der Wirkung der nämlichen Anziehungskraft durch eine einförmig zunehmende Kraft durchlaufen werden, das nämliche Verhältniß unter sich, welches die Quadrate der Zeiten beobachten; und diese sind wie die Quadraten der Räume, welche zu der nämlichen Zeit mit einer einförmigen und durch den Fall überkommenen Geschwindigkeit beschrieben würden; wie dieses alles aus der Lehre der Mechanik bekannt ist. Es ist also $PR : MD = MP^2 : ML^2$. Und, wenn man das erste Verhältniß mit PA, welche zu MV parallel ist, multiplicirt, so ist $PR \times PA : MD \times PA = MP^2 : ML^2$. Es ist aber bekannt, daß in einem Zirkel $PR \times PA = MP^2$: so ist denn auch $MD \times PA = ML^2$. Deßwegen ist $PA : ML = ML : MD$. Wenn nun die Linie PA der andern Linie MV unendlich nahe kömmt; oder wenn die Puncte M, R zusammenfließen, so ist $PA = MV$; deßwegen auch $MV : ML = ML : MD$. Nehme man nun, daß $ML = 2MD$, so ist $MV = 2ML$, mit-

hin $MD = \frac{1}{4}MV$. Das ist: die Sehne eines küssenden Zirkels in einem Kögelschnitte, wenn sie durch den Brennpunct gehet, in welchem der Mittelpunct der im umgekehrten gezweyfältigten Verhältnisse wirkenden Kräfte ist; eine solche Sehne ist die vierfache Höhe, durch welche ein Körper fallen muß mit einer unveränderlichen Anziehungskraft, welche er in einem solchen Abstande hat, daß er jene Geschwindigkeit überkomme, mit welcher er nach der gegebenen Richtung soll hingerissen werden, um den gegebenen Kögelschnitt zu beschreiben.

35. §.

Eben diesen Hauptsatz von der Theorie der Centralkraft kann man aus des Newtons oder de la Cailles Grundsätzen (welche wir indessen borgen wollen, um nicht gar zu sehr weitläuftig zu werden) auf folgende Art beweisen. Man nehme MD als die Höhe an, durch welche, wenn ein Körper fällt, in M die Geschwindigkeit erhalten wird. So ist nun vermöge der astronomischen Grundsätze *) die Geschwindigkeit in M wie $\frac{\sqrt{2MB}}{FT}$ (denn, wenn man die Linie NB zur FM perpendicular ziehet, so ist MP der halbe Parameter von der Hauptaxe, wie wir schon oben 24. §. bewiesen haben): es ist aber auch aus den mechanischen Grundsätzen **) $c = 2\sqrt{\varsigma v}$, oder auch $2\frac{\sqrt{MD}}{FM}$, und hiemit $\frac{\sqrt{2MB}}{FT} = \frac{2\sqrt{MD}}{FM}$, oder $\frac{2MB}{FT^2} = \frac{4MD}{FM^2}$. Deßwegen ist $FM^2 : FT^2 = 2MD : MB$; und wenn man aus T zu FM eine senkrechte Linie TX herabfallen läßt, so bekömmt man wegen

*) Siehe Newton. Lib. I. Princ. Propos. XVI. Theorem. VIII. Item de la Caille Leçons Astron. §. 166.

**) Siehe des de la Caille Mechanic. §. 113.

gen $FM^2 : FT^2 = FM : FX$ die Proportion $FM : FX = 2MD : MB$: ziehet man weiters die Linie NL zu MT parallel, so ist gleichfalls $ML : MB = FM : FX$; denn die Dreyecke FTM, FTX, MNL, MNB sind einander ähnlich. Deßwegen wird auch $MB : ML = MB : 2MD$; das ist, $2MD = ML$. Es ist aber aus der Lehre von den Kögelschnitten bekannt, daß $MC = \frac{MN^3}{MB^2}$; und also ist MLC ein rechter Winkel (26. §.) und $ML = \frac{1}{2}MV$; hiemit $MD = \frac{1}{2}ML = \frac{1}{4}MV$.

36. §.

Wir haben schon oben 32. §. gesagt, daß, wenn D oder dem F ist, so ist der Durchschnitt des gegebenen küssenden Winkels eine Ellipse; wenn aber D mit F zusammenfließt, ist selber eine Parabole; und endlich eine Hyperbole, wenn D unter dem F liegt. Nun ist es richtig, daß, wenn eine Ellipse beschrieben wird, die Projectionsgeschwindigkeit minder seyn müsse, als die Geschwindigkeit, welche der Körper überkommen würde, wenn er aus M bis in F fiele. Eben so gewiß ist es, daß selbe in Beschreibung einer Parabole gleich seyn müsse. Endlich zur Beschreibung einer Hyperbole ist nöthig, daß der Körper mit einer größern Geschwindigkeit muß hingerissen werden, als diejenige ist, welche man durch eine in M unveränderliche Anziehungskraft überkommen würde, wenn der Körper aus M in F fällt.

37. §.

Wenn wir im voraus setzen, daß der Mittelpunct der Kräfte einen unendlich grossen Abstand habe, so bekömmt man eine Parabole (XIX. Fig.). Denn alsdenn wird die Linie TN zu

UM parallel. Ferner in der oben bewiesenen Analogie DF : FM = FM : FE (30. §.) wird FM — FD (oder DM) : FE — FM (ME) = DF : FM. Weil nun nach dem gesetzten Heischesatz FD und FM unendlich groß sind, so sind sie einander gleich, wie auch DM = ME; deßwegen, wenn man aus E eine senkrechte Linie EQ ziehet, und das Q*f* demselben gleich nimmt, so bekömmt man den Brennpunct *f*; hernach ziehe man die Ordinate MP; die Subtangens PT, und bestimme den Scheitelpunct S, so wird man EM als den vierten Theil des zum Durchmesser MV gehörigen Parameters überkommen.

38. §.

Wenn M der Scheitelpunct von der Hauptaxe des Kegelschnittes ist, (XV. XVI. XVII. XVIII. Fig.) so gehet der Durchmesser des küssenden Zirkels durch den Mittelpunct der Kräfte, und die Sehne MV wird mit dem Diameter zusammen stießen; deßwegen auch die Puncte L, N, C zusammen kommen. Wir wissen aber, daß die Normale im Scheitelpuncte einem halben Parameter gleich sey (19. §.), und hiemit verwandelt sich die Formel $\frac{MN^3}{MB^2}$, welche die Gleichung des halben Durchmessers vom küssenden Zirkel ist (26. §.), in $\frac{MB^3}{MB^2} = MB$, welches einem halben Parameter gleich ist. Es ist also in diesem Falle MQ die Normale zu MF (Fig. XX.). Wenn nun MD < DF in der Analogie FD : FM = FM : FE, so wird FM < 2FD, hiemit auch FE < 2FM. Deßwegen läßt man die zu MQ in M senkrechte Linie EM herabfallen, und ziehet man sie hinaus bis in *f*, daß also M*f* = ME, so wird *f* innerhalb M und F fallen. Es ist also in diesem Falle M der oberste Apsidenpunct von einer zu beschreibenden Ellipse. Und, wenn man die vorige Proportion

zer-

zertheilet, so wird FE — FM (ME); FM = FM — FD (MD): FD, hiemit ME: MD = FM: FD und FM > FD, folglich auch EM > MD: deßwegen wird *f* zwischen den D und F hineinfallen.

39. §.

Wenn MD > FD (Fig. XXI.), so wird FM > 2FD, und FE > 2MF; deßwegen, wenn man den Punct *f* auf das M beziehet, so wird selber über das F hinausfallen, und M wird also der unterste Apsidenpunct in einer beschriebenen Ellipse seyn.

40. §.

Wenn MD = DF (Fig. XXII.), so wird FM = 2FD, und FE = 2FM, wo dann *f* in F fallen wird; das ist, es wird ein Zirkel beschrieben werden. Deßwegen ist klar, daß das Hugenische Theorem nur als ein sonderlicher Fall in Betrachtung des gesagten anzusehen sey, denn Hugenius beweiset, daß die Geschwindigkeit in einem Zirkel derjenigen Geschwindigkeit gleich kömmt, welche überkommen wird, wenn der Körper den vierten Theil des Durchmessers herabfällt.

41. §.

Wenn MD > MF (Fig. XXIII.), und FE auf der nämlichen Seite ist, wo D liegt, so wird EM allzeit größer seyn als FM: deßwegen fällt *f* allzeit außer die Tangente, und der Kegelschnitt wird eine Hyperbole seyn. Im Gegentheil ist MD = MF (Fig. XXIV.), oder FD = o, so wird ME = ∞, und der zu beschreibende Kegelschnitt eine Parabole seyn.

42. §.

Wenn MD unendlich groß ist, (Fig. XVII. und XXIII.) das ist, wenn ein Körper mit einer unendlich grossen Geschwindigkeit hingerissen wird, so verwandelt sich die Hyperbole in eine gerade Linie MQ; denn auf solche Weise wird $FD = \infty$, und die Analogie $FD : FM = FM : FE$ sich in $\infty : FM = FM : o$ verändern, wo denn, weil die Transverse oder Zwergaxe sich verliehret, die Hyperbole eine unendliche Breite überkömmt; das ist, selbe wird zu einer geraden Linie.

43. §.

Wenn MQ oder die Richtung der Projection mit FM (Fig. XXV.) in einer geraden Linie liegt, und der Körper mit derjenigen Geschwindigkeit hingerissen wird, welche er überkömmt, wenn selber durch MD fällt; so werden erstens MC und LC parallele; oder der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels unendlich groß; hernach fällt LM in M, oder die Normale MN verliehret sich; endlich wird die krumme Linie sich in eine gerade verändern, welche durch den Mittelpunct der Kräfte gehet. Aus welchem sich dann weiters folgern läßt, daß, wenn ein Körper eine Ellipse SMs (Fig. XII.) beschreibet, wo der Hauptparameter 2MB sey, so wird dessen Geschwindigkeit in s als dem untersten Apsidenpuncte zur Geschwindigkeit in S, als dem obersten Apsidenpuncte, eben das Verhältniß beobachten, welches ist zwischen $\frac{\sqrt{2BM}}{Fs}$ und $\frac{\sqrt{2BM}}{FS}$ oder $FS\sqrt{2BM} : Fs\sqrt{2BM}$.

44. §.

Wenn in den meisten Figuren, auf welche wir uns bisher bezogen haben, das MD einem o gleich genommen wird, so bekömmt

kömmt die Analogie FD : FM = FM : FE alle drey Glieder einander gleich; deßwegen ME = o und f mit M zuſammenfließt. Hiemit, wenn ein Körper mit einer unendlich kleinen Geſchwindigkeit hingeriſſen wird, ſo wird er eine unendlich enge Ellipſe, das iſt, eine gerade Linie beſchreiben, welche durch den Mittelpunct der Kräfte gezogen wird.

45. §.

Aus dem geſagten läßt ſich ferner beweiſen, daß die Geſchwindigkeit eines Körpers, welcher einen Kegelſchnitt beſchreibet, und wo der Mittelpunct der Kräfte in dem Brennpuncte geſetzet wird, in einem jeden Puncte des Umkreiſes das gerade Quadratwurzlichte Verhältniß (Ratio directa ſubduplicata) des Hauptparameters, und das verkehrte einfache Verhältniß des Perpendikels, welches man aus dem Mittelpuncte der Kräfte herabläßt, beybehält. Denn aus den Formeln der Mechanik, wo man gemeiniglich die Geſchwindigkeit durch c, die Zunehmungskraft durch v, und den Raum durch s ausdrücket, iſt bekannt, daß $c = 2\sqrt{sv}$; wir nehmen aber in dieſem Zuſatze an, daß $v = \frac{1}{FM^2}$; und $s = \frac{1}{4}MV$ (Fig. XV.) Deßwegen iſt nothwendig $c = \frac{2 \times 1}{FM} \times \frac{2}{2}\sqrt{MV} = \frac{\sqrt{MV}}{FM}$. Es iſt aber BM : MN = MN : ML = $\frac{MN^2}{BM}$; und $2ML = MV = \frac{2MN^2}{BM}$. Wie auch wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke FTM und MBN bekömmt man FT : FM = BM : MN = $\frac{MF.BM}{FT}$; folglich $\frac{2MN^2}{BM} =$

Formel für diese Aufgabe ist $f = \frac{SP}{ST^3 \times {}^2PG}$ *) wo ST (Fig. XXVI.) die senkrechte Linie ist, welche aus dem Mittelpuncte der Kräfte zur Tangente gezogen wird. 2 P Y ist der Durchmesser des küssenden Winkels, und SP der Radius Vector. Weil aber nach diesem Satze $2PY = \frac{2SD^2}{ST}$ so wird $f = \frac{SP \times ST}{ST^3 \times 2SD^2} = \frac{SP}{ST^2 \times 2SD^2}$. Es ist aber $SD^2 = \frac{AS^2 \times SB^2}{ST^2}$; deßwegen, wenn man dafür den Werth ansetzet, so ist $f = \frac{SP \times ST^2}{2ST^2 \times AS^2 \times BS^2}$ $= \frac{SP}{2AS^2 \times BS^2}$, und wenn man endlich die unveränderlichen Größen wegläßt, so wird $f = SP$.

49. §.

Dritte Aufgabe.

Das Verhältniß der periodischen Zeiten zu finden, wenn ein Körper durch die Centralkraft, welche nach dem Mittelpunct der Ellipse gerichtet ist, eine Ellipse beschreibet. Man soll aber dieses Verhältniß sowohl für die Ellipse, als für einen Zirkel bestimmen, welcher über die größere Axe der Ellipse ist beschrieben worden. Es sollen also die Zeiten, in welchen der Zirkel und die Ellipse beschrieben worden, T und t heißen. Die Größe des Raumes von dem Zirkel sey = A; von der Ellipse aber = a. Setze man nun, daß der Körper aus A (Fig. XXVII.), wo die Centralkraft in einer Ellipse und in dem Zirkel die nämliche ist, hingerissen werde, so werden die Zeiträume A M S und A N S seyn, da indessen in der Zeit, wo der Körper durch A P fällt, in der Ellipse

*) Siehe De la Caille Leçons Astron. §. 162.

$MC = MV : MO$; das ist: $\frac{MR^2}{MO} : MY = MV : MO$: hiemit $MY = \frac{MO \times MR^2}{MO \times MV} = \frac{MR^2}{MV}$. Wenn man also diesen Werth in der Formel ansetzt, so wird $f = \frac{MR^2}{FT^2 \times MR^2 \times MV} = \frac{1}{FT^2 . MV}$. Hernach ist $CM : LM = MO : MV = FM : FT$, hiemit $FT^2 = \frac{MV^2 . FM^2}{MO^2}$, wo dann endlich $f = \frac{MO^2}{FM^2 \times MV^3}$, und, wenn man die unveränderliche Größe MO^2 wegläßt, so ist $f = \frac{1}{FM^2 \times MV^3}$.

47. §.

Es kann also durch die allgemeine Anziehungskraft kein Zirkel beschrieben werden, wenn nicht der Mittelpunct der Kräfte eben der Mittelpunct des Zirkels ist. Deßwegen können die Planeten um die Sonne keine Zirkelbögen beschreiben, wenn die Sonne außer den Mittelpunct gesetzt ist.

48. §.

Zwote Aufgabe.

Das Verhältniß der Centralkraft zu finden, wenn der Körper eine Ellipse beschreibt, und der Mittelpunct der Ellipse mit dem Mittelpuncte der Kräfte überein kömmt, oder eben derselbe ist. Die

Formel für diese Aufgabe ist $f = \frac{SP}{ST^3 \times^2 PG}$ *) wo ST (Fig. XXVI.) die senkrechte Linie ist, welche aus dem Mittelpuncte der Kräfte zur Tangente gezogen wird. 2 P Y ist der Durchmesser des küssenden Winkels, und SP der Radius Vector. Weil aber nach diesem Satze $2PY = \frac{2SD^2}{ST}$ so wird $f = \frac{SP \times ST}{ST^3 \times 2SD^2} = \frac{SP}{ST^2 \times 2SD^2}$. Es ist aber $SD^2 = \frac{AS^2 \times SB^2}{ST^2}$; deßwegen, wenn man dafür den Werth ansetzet, so ist $f = \frac{SP \times ST^2}{2ST^2 \times AS^2 \times BS^2} = \frac{SP}{2AS^2 \times BS^2}$, und wenn man endlich die unveränderlichen Größen wegläßt, so wird $f = SP$.

49. §.

Dritte Aufgabe.

Das Verhältniß der periodischen Zeiten zu finden, wenn ein Körper durch die Centralkraft, welche nach dem Mittelpunct der Ellipse gerichtet ist, eine Ellipse beschreibet. Man soll aber dieses Verhältniß sowohl für die Ellipse, als für einen Zirkel bestimmen, welcher über die größere Axe der Ellipse ist beschrieben worden. Es sollen also die Zeiten, in welchen der Zirkel und die Ellipse beschrieben worden, T und t heißen. Die Größe des Raumes von dem Zirkel sey = A; von der Ellipse aber = a. Setze man nun, daß der Körper aus A (Fig. XXVII.), wo die Centralkraft in einer Ellipse und in dem Zirkel die nämliche ist, hingerissen werde, so werden die Zeiträume A M S und A N S seyn, da indessen in der Zeit, wo der Körper durch A P fällt, in der Ellipse

*) Siehe De la Caille Leçons Astron. §. 162.

Ellipse AM und in dem Zirkel AN beschrieben würden. Nehme man nun den Sector ANS = S, und den Sector AMS = s, so ist aus den mechanischen Grundsätzen $T : t = \frac{A}{S} : \frac{a}{s}$ (18. §.). Es ist aber $A : a = SD : SY$ und $S : s = SD : SY$; deßwegen, wenn man diesen Werth dafür ansetzet, so ist $T : t = \frac{SD}{SD} : \frac{SY}{SY} = 1 : 1$, folglich $T = t$.

50. §.

Wenn man nun das Gesagte genugsam einsieht, so ist es klar, daß der geometrische Ort aller Brennpuncte f in den Kegelschnitten, welche durch eine jede Projectionsgeschwindigkeit nach einer gewissen Richtung QM um den gegebenen Brennpunct F mögen beschrieben werden (Fig. XVII.) eine unendliche gerade Linie $fM\Phi$ sey, also zwar, daß davon der unbestimmte Theil $M\Phi$ für die Brennpuncte der Ellipsen gehöre, welche sich in eine Parabole verwandeln, sobald Φ unendlich von M abweicht: hingegen wird Φ dem M unendlich nahe kommen, so ziehen sich die Ellipsen in eine gerade Linie zusammen. Weiters gehört der andere Theil Mf für die Hyperbolen, also zwar, daß, wenn selbe um den Brennpunct F beschrieben werden, sie allzeit QM in M berühren, so oft $Mf > MF$. Wenn aber $FM = Mf$, so verwandeln sich beyde Hyperbolen in eine gerade Linie QM. Ist endlich $FM > fM$, so berühren sie die gerade Linie QM, welche den Brennpunct f haben. Wenn also die Anziehungskraft nach F abzielet, so ist es nicht möglich, daß eine Hyperbole um den Brennpunct f beschrieben werde, denn, weil in diesem Falle allzeit $EM > FM$ und $EM = fM$, so ist auch $fM > FM$. Nimmt man aber im Gegentheil die vom Punct F zurück prellende Kraft,

welche

welche in einem gezweyfältigten umgekehrten Verhältnisse der Abstände wirket, so werden zwar Hyperbolen, von welchen der Ort ihrer Brennpuncte f auf der andern Seite der Tangente QM in Mf ist, beschrieben werden, aber nur so lange, bis Mf dem MF gleich werde. Also wollen wir setzen, daß der Körper M (Fig XXVIII.) von F im besagten Verhältnisse zurück geprellet werde, so wird man MD über QM hinaus ziehen müssen, durch welche Linie, wenn der Körper mit einer unveränderlichen zurückprellenden Kraft in M zurück kehrte, selber diejenige Geschwindigkeit überkommen würde, mit welcher er aus M hingerissen wird. Man mache nun die Analogie FD : FM = FM : FE; läßt man nun die Perpendiculare EQ zn QM herabfallen, und nimmt man das $EQ = Qf$, so überkömmt man den Brennpunct der Hyperbole AMO, welche um den Brennpunct f beschrieben wird. Denn, weil MD dem vierten Theile der Sehne des küssenden Zirkels gleich ist, und, indem selbe durch den Mittelpunct der zurück prellenden Kraft F gezogen ist, sie über QM zu stehen kömmt, so ist der ganze Zirkel über QM hinaus. Deßwegen, wenn man, wie vorher, das DL dem MD gleich macht, und zu CM die Perpendiculare LN (es ist aber CM zu QM gleichfalls eine senkrechte Linie) ziehet, so wird MN die Normale der Hyperbole. Ferner bekömmt man in der Analogie FD : FM = FM : FE durch die Zertheilung FD — FM (DM) : FM — FE (ME) = FD : FM und wegen des rechten Winkels bey N ist ND = DM; wegen der zween rechten aber bey Q ist $fM = ME$; deßwegen ist auch $ND : fM = FD : FM$. Wenn man also Ff hinaus ziehet, so gehet selbe durch N.

51. §.

Man kann ſich einen dreyfachen Fall vorbilden, in wel-
em eine Hyperbole, welche durch eine zurückprellende Kraft be-
rieben wird, ſich in eine gerade Linie verwandelt. Der erſte
ll iſt, wenn man die Projectionsgeſchwindigkeit als unendlich
oß oder $= \infty$ annimmt. Der zweyte Fall iſt, wenn man
en dieſe Geſchwindigkeit oder MD als $= o$ anſetzet; und in
eſem Fall iſt $FM = f\,F = EF$; das iſt, der Abſtand des
rennpuncts von dem Scheitelpunct verliehrt ſich ganz und gar,
d die Hyperbole, indem ſie unendlich zuſammen gedrückt wird,
rwandelt ſich in eine gerade Linie. Wenn man endlich für
n dritten Fall ſetzet, daß MQ mit FM in einer geraden Linie
gt, ſo geſchieht das nämliche. Ferner läßt ſich folgern, daß,
enn F zu einem unendlich entfernten Abſtande gelangt, oder wenn
e zurückprellende Kraft nach den parallelen Richtungen wirket,
wird die Hyperbole, welche man um den Brennpunct f be-
reibet, zu einer Parabole, welche nach der Methode, ſo
ie oben 37. §. iſt bewieſen worden, kann beſtimmet werden; dies
einzige muß man beobachten, daß man F auf die Seite des E
tze, und die in der XIX. und XXIV. Figur gemachte Entwer-
ung umzuwenden habe.

52. §.

Wenn ein Körper um F (Fig. XII.) einen Zirkel, deſſen
adius Fs wäre, beſchreiben ſollte, ſo würde ſeine Geſchwindig-
it durch $2\sqrt{vs}$ müſſen ausgedrücket werden, wo denn v die Cen-
alkraft, s aber den Raum, durch welchen ein Körper fallen
ürde, anzeigete, oder man würde dieſelbe auch durch das Ver-
ältniß zu $\frac{2 \times 1 \times \sqrt{\frac{1}{2}Fs}}{Fs} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}Fs}}{Fs} = \frac{\sqrt{2Fs}}{Fs}$ ausdrücken können

(43. §.). Eben auf dieſe Weiſe, wenn ein Körper einen Zirkel beſchreiben ſollte, deſſen Mittelpunct F und der halbe Durchmeſſer Fs wäre, ſo würde eine Geſchwindigkeit erfordert, welche wäre wie $\frac{\sqrt{2}Fs}{FS}$; deßwegen würde die Geſchwindigkeit eines ſolchen Körpers, welcher nämlich einen Zirkel von einem halben Durchmeſſer F S beſchriebe, durch das Verhältniß $FS\sqrt{2}Fs : Fs\sqrt{2}FS$ müſſen ausgedrücket werden. Es iſt aber klar, daß $Fs < BM$ und $FS > BM$; deßwegen iſt auch $FS\sqrt{2}BM > FS\sqrt{2}Fs$ und $Fs\sqrt{2}BM < Fs\sqrt{2}FS$; hiemit iſt $FS\sqrt{2}BM$ die Geſchwindigkeit in dem unteren; $Fs\sqrt{2}BM$ aber die Geſchwindigkeit in dem oberſten Apſidenpuncte von einer Ellipſe. Wenn alſo ein Körper in einer Ellipſe zu dem unterſten Apſidenpuncte kömmt, ſo hat er eine größere Geſchwindigkeit, als daß er mit ſolcher einen Zirkel, deſſen halber Durchmeſſer der Abſtand dieſes Apſidenpuncts von dem Mittelpunct der Kräfte wäre, beſchreiben könnte. Iſt er aber im oberſten Apſidenpunct, ſo iſt ſeine Geſchwindigkeit minder, als ſie erfordert wird einen Zirkel zu beſchreiben, wo der halbe Durchmeſſer dem Abſtande des oberſten Apſidenpuncts von dem Mittelpuncte der Kräfte gleich kömmt. Uebrigens verſtehet man leicht, daß die Geſchwindigkeiten der Körper, welche für ihren Umkreis concentriſche Zirkeln hätten, ein umgekehrtes quadratwurzlichtes Verhältniß ihrer halben Durchmeſſer beobachten müßten; denn, wenn die halben Durchmeſſer F S und Fs ſind, ſo ſind aus dem Geſagten die Geſchwindigkeiten wie $Fs\sqrt{2}FS : FS\sqrt{2}Fs$; oder, wenn man dieſe zwey Glieder mit $\sqrt{2Fs \times FS}$ dividirt, ſo verhalten ſie ſich wie $\sqrt{Fs} : \sqrt{FS}$.

53. §.

53. §.

Wir haben schon gesagt, daß LNM (Fig. XV.) ein rechter Winkel sey (§. 26.): Es gehet also der Zirkel, welchen man über den Diameter LM aus dem Mittelpuncte D beschreibet, durch N. Deßwegen wird DN = DM, und DNM = DMN = MN*f*. Folglich sind DN und M*f* einander parallel, und FD: DN (oder DM) = FM: M*f*; wiederum FD: FD + DM (FM) = FM: FM + M*f* (S*s*), welche Analogie wir schon anderswo bewiesen haben (§. 30.).

54. §.

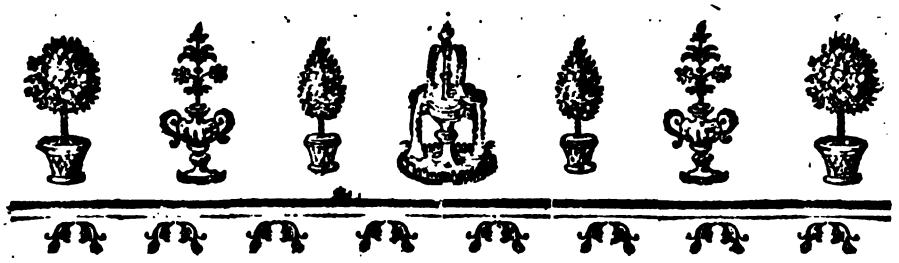
Man kann die Aufgabe von den Centralkräften auch umkehren, und alsdann folgende Auflösung anwenden, durch welche man zugleich beweisen kann, daß die Centralkräfte, wenn sie im umgekehrten verzweyfältigten Verhältnisse wirken, einen Kegelschnitt beschreiben. Es sey (Fig. XXVIII.) FT das Perpendikel, welches man aus F dem Mittelpuncte der Kräfte auf die Tangente MQ herabgelassen. MVA sey der in M küssende Zirkel von einer krummen Linie, welche man beschreiben soll; und FM sey der Radius Vector. In diesem Falle ist *f* die Centralkraft = $\frac{FM}{FT^3 \times MA} = \frac{1}{FM^2}$; * oder $FM^3 = FT^3 \times MA$. Deßwegen ist $FM^3 : FT^3 = MA : R$ (1): oder auch, weil die Dreyecke FTM, MVA sich ähnlich sind, so werden MP und MO zu MA MV proportional: hiemit ist $FM^3 : FT^3 = MA^3 : MV^3 = MA : MO = MA : 1$. Deßwegen ist MO = 1; das ist, MO ist eine unveränderliche Größe. Nun aber nehmen wir von diesen die halben Theile MC, MB, so wird MO als der Parameter = MB; denn MB ist der halbe Parameter der Axe von dem Kegelschnitte,

* Siehe de la Caille Leçons Astronom. §. 161.

weil MC, ML, MN, MB beſtändig proportional ſind, wie wir ſchon oben §. 26. bewieſen haben. Weil nun in den Kegelſchnitten allzeit MA zu MO, als der unveränderlichen Stöße das nämliche Verhältniß haben, welches zwiſchen FM^3 und FT^3 iſt, und weil dieſes Verhältniß allezeit in den krummen Linien, welche durch die nach dieſem Geſetze wirkenden Kräften beſchrieben werden, beobachtet wird, ſo iſt es mehr als überzeugend, daß alle Puncten einer krummen zu beſchreibenden Linie ſolche ſind, durch welche der nämliche Kegelſchnitt gehen muß, und hiemit ein Kegelſchnitt beſchrieben wird. Was aber für eine Gattung der Kegelſchnitte eine ſolche krumme Linie an ſich nehme, das hängt eigentlich von der Projectionsgeſchwindigkeit ab, welche, wenn ſie gegeben wird, ſo kann man durch die Höhe MD und durch den Abſtand MF alle Gattungen der Kegelſchnitte beſtimmen, ſo wie wir genugſam bisher bewieſen haben.

Ein Brief
von der
Berechnung
des
im Jahre 1769.
erſchienenen
Kometen.

Ein Brief
von der
Berechnung
des
im Jahre 1769.
erschienenen
Kometen.



Mein Freund!

I. §.

Ich bedaure Sie von Herzen. „ So viel Arbeit, schreiben „ Sie, und dennoch nichts richtiges; gewiß das läßt etwas „ verdrüßlich " —. Sie haben Recht, mein Freund! Ich ärgere mich selbst über den mißlichen Fortgang Ihrer gewiß ungemein mühsamen Arbeit. Würde ich nicht von Ihrer geübten Geschicklichkeit, und gründlichen Kenntniß in astronomischen Gegenständen überzeuget seyn, so würde ich mich wohl über Ihre fruchtlose Arbeit ein wenig lustig machen: Aber so haben Sie nichts gewagt, was Ihre Kräfte überstieg. Doch, wenn Sie sich schon mit diesem astronomischen Kalkulus was längers herumbalgen müssen, ohne bisher Ihre Arbeit durch einen richtigen genauen Auswurf des Berechneten belohnt zu sehen, so müssen Sie deßwegen den Muth nicht verliehren. Ich habe es aus eigener Erfahrung, daß man am Ende allzeit ein größeres Vergnügen findet, je schwerer einem die Entdeckung des Gesuchten geworden ist. Glauben Sie mir, daß man in der Astronomie vieles auch durch Fehlen lerne. Wir wollen es dem einzigen Halley glauben, daß

er

er nach ſeinem Zeugniſſe niemals in ſeinen Berechnungen ſich ſoll geirret haben. Die übrigen, und unter dieſen die berühmteſten und vollkommenſten Meiſter der Mathematik und Aſtronomie rechnen es ſich nicht zur Schande, wenn man Sie in Ihren ſonſt vortreflichſten Werken eines eingeſchlichenen Fehlers überzeuget. Noch allzeit, ſagen ſie, hat man die aſtronomiſchen Werke von ihren eingeſchlichenen Fehlern verbeſſert, und man wird es auch wohl noch für die Zukunft thun müſſen.

2. §.

Sie haben ſich über die Berechnung des letzt erſchienenen Cometen gewagt, und dieſes Ihr gewiß mühſames Unternehmen rechtfertiget auch den unglücklichen Ausfall Ihrer Arbeit, wie Sie ſelben nennen, ſchon ziemlichermaſſen: denn die Berechnung eines Cometen iſt gewiß in ſich ſelbſt einer der wichtigſten und ſchwerſten Gegenſtände der Aſtronomie. Dieſe giebt auch den geübteſten Meiſtern viel zu ſchaffen; aber eben darum macht Ihnen dieſe Arbeit ſchon viele Ehre, wenn Sie doch nicht auf den Nutzen einer auch am Ende nicht gar zu richtig gerathenen Arbeit ſehen wollen. Sie beſchweren ſich über die Methode, welche man gemeiniglich für dieſe Berechnung anſetzet. Sie wünſchen eine andere, und begehren von mir wenigſt eine Anleitung, dieſe Methode mit mehrerem Vortheile ohne ſo vielen Zeitverluſt und ungemein groſſe Mühe anwenden zu können. Allein ich weis bisher noch keine andere, welche mit größerem Vortheile und Genauigkeit für die Berechnung eines Cometen, als die jetzige allgemeine und bekannte Methode möchte angegeben werden. Sie wiſſen es ſelbſt. Hetuelius hat die Parabole der Cometen erfunden; Newton war der erſte, welcher eine Methode angegeben, dieſelben zu berechnen; und Halley hat dieſe Methode ziemlich verbeſſeret. Die jetzigen Aſtronomen

nomen gehen noch den nämlichen Weg, und, nachdem Herr de la Caille *, und nach Ihm Herr de la Lande in seinem vortreflichen astronomischen Werke ** und anderswo *** die Theorie der Kometen und ihre Berechnung durch neue Zusätze und allgemeine Tabellen für die wahre Anomalie derselben aufgekläret, und vollkommener gemacht hat, so würde ich wohl unbescheiden seyn, wenn ich Sie anderswohin als auf diese vollkommensten Meister anwiese.

3. §.

„ Aber, schreiben Sie, schon dreymal habe ich umsonst gearbeitet" —. Ich glaube es Ihnen, mein Freund, wenn Sie auch geschrieben hätten, daß Sie es dreyßigmal umsonst versucht haben. Wir haben Beyspiele von den geschicktesten Meistern, daß es Ihnen nicht besser ergangen ist. Ich würde gar zu ausschweifend werden, wenn ich Ihnen davon alle Ursachen eines für diese Berechnung übel gerathenen Versuches angeben wollte; genug! daß Sie selbst wissen, daß sich diese bekannte Methode der Berechnung der Kometen theils auf die Genauigkeit der Bestimmung der geraden Ascension und Abweichung des Kometen; theils auf die Annehmung eines ungewissen Verhältnisses zweener Abstände gründet, oder daß selbe durch die sogenannte Positio Falsi müsse ausgearbeitet werden. Sie irren sich also, wenn Sie anderswo als in der willkürlichen Annehmung dieser zwoen Distanzen, welche in Ihrem Kalkulus den wahren Abständen des Kometen von der Erde noch nicht gar zu nahe gekommen sind, die Ursache des Beschwernisses dieser Methode und Ihrer bisher noch unrichtigen Berechnung aufsuchen. Und wie gemein ist nicht dieser Fehler in un-

*) Siehe de la Caille Leçons Astron. §. 177. &c. & §. 527. &c.

**) Siehe de la Lande Astron. Tom. II. Liv. XIX.

***) Théorie des Cometes (en Tables Astron. de Halley pag. 70. & suiv. 1859.)

serem Falle? Man muß wohl ziemlich glücklich oder doch der erfahrenste und geübteste Meister in der Astronomie seyn, wenn man schon auf das erste oder zweytemal für zwo Beobachtungen solche zween Abstände anzunehmen weis, welche einer dritten Beobachtung, als dem ächten Gesichtspuncte der ganzen Berechnung genug thun. Hernach setze man, daß eine solche dritte Beobachtung, welche die Leiterinn des ganzen Kalkulus ist, nicht vollkommen genau sey, so ist es wohl um die Richtigkeit der ganzen Berechnung auf das neue geschehen. Das schlimmste dabey ist, daß man zur genauen Bestimmung der zween willkürlichen Abständen keine gewisse Erleichterungsmittel an die Hand geben kann. Nur allein gewisse Umstände der Erscheinung des Kometen; als nämlich seine Lage, sein Ab- oder Zunahm in der beobachteten Länge, Breite und Abweichung, die Wendung seiner Dunstsäule, die Größe seines Durchschnittes, die Blasse oder Helle seines Lichtes können einen geschickten Astronomus auf die Spur der ächten Abstände des Kometen von der Erde führen, durch welche er hernach eine dritte Distanz und also alle seine Elementen bestimmen kann. Sie müssen es sich also, mein Freund, gar nicht verdrüssen lassen, daß Sie zu dreymal umsonst gearbeitet haben, besonders, wenn Sie die graphische Entwerfung der verschiedenen Parabolen, welche man zur Erleichterung der Berechnung der wirklichen Parabole eines Kometen ausgedacht hat, * nicht zu Hilfe genommen haben.

4. §.

Nun sehen Sie selbst, mein Freund, daß es sich nicht wohl thun läßt, die so lang beybehaltene Methode, welche Ihnen so sehr mühsam vorkömmt (wie sie denn in sich gewiß nicht die bequemste ist), auf eine vortheilhaftere Art, als es schon geschehen

* Siehe Mr. de la Lande Astron. Liv. XIX. §. 2445.

hen ist, zu erleichtern. Man müßte nur etwa eine ganz neue Methode für die Berechnung der Kometen erfinden, wo man nicht so viele Umschweife nöthig hätte, und wo man sonderlich die willkührliche Annehmung der zwoen Distanzen, welche diese Berechnung wohl etwas langweilig und verdrüßlich machen, vom Halse brächte. Aber nicht wahr, das wollen wir wohl bleiben lassen? Es ist doch noch leichter, sich in eine schon erfundene obwohl etwas harte Methode zu schicken, als eine ganz neue zu erfinden. — Doch Sie erinnern sich vieleicht nicht, daß schon Newton für die Berechnung der Parabole eines Kometen nebst der bekannten und jetzt gebräuchlichen Methode noch eine andere ausgedacht habe *), wo er nämlich einen von dem Kometen binnen enger Zeitfrist beschriebenen Laufbogen als unendlich klein annimmt, und deßwegen selben als eine gerade Linie vermög der einzelen Grundsätzen einer ebenen Trigonometrie berechnet, und nachmals die ganze Parabole bestimmet. Nun wie gefällt Ihnen diese Methode der Berechnung eines Kometen? Selbe wäre doch, als die einfachste und aufgeklärteste der allgemeinen und schon bekannten Berechnungsform vorzuziehen? „O! sagen Sie, selbe „ muß gewiß nicht viel taugen, sonst würden sie die jetzigen Astro„ nomen schon längst hervorgesucht haben. " — Ihre Ahndung ist gründlich, mein Freund! man weis schon, daß diese Methode von keinem Gebrauche sey; denn man hat es bewiesen, daß diese vom Newton angegebene zweyte Methode von einer unbestimmten Auflösung sey; wie dieses auch leicht zu begreifen ist, weil Newton nur das einfache, nicht aber das zusammen gesetzte Verhältniß der Zeit und der Bewegung des Kometen in seiner Länge ansetzet, hiemit die Größe des zu berechnenden Bogens allzeit unbestimmt bleibt. Nun ist also Ihre Hofnung auf eine neue und

*) Siehe Newton. Lib. I. Princip. Mathem. & opuscul. XVII. de Mundi Systemate.

leichtere Methode für die Berechnung der Kometen wieder zu Waſſer geworden? aber haben Sie Geduld, mein Freund! ich muß noch vorher ein paar Worte ſagen, bis ich Sie etwa wiederum aufzumuntern vermöge.

5. §.

Wiſſen Sie alſo, daß man ſich bey Entdeckung der Unrichtigkeit dieſer Methode ſehr bemühet hat, ſelbe zu verbeſſeren, und brauchbar zu machen. Zu dem Ende hat man den gemachten Einwurf wegen dem Unbeſtimmten dieſer Auflöſung gehoben, und durch eine gehörige Proportion, welche aus dem Verhältniſſe der Zeit und der Geſchwindigkeit des Kometen zuſammen geſetzt iſt, und ſich auf das Verhältniß des Abſtandes des Kometen von der Erde in der mittleren Beobachtung zu dem Abſtande der erſten und dritten Beobachtung beziehet, und wovon ich gleich unten (§§. 10. 11.) reden werde, die unbeſtimmte Auflöſung der newtoniſchen Methode in eine beſtimmte verwandelt. Man hat noch vieles daran zu verbeſſeren geſucht; alſo z. B. hat man den Bogen der Parabole des Kometen, deſſen Beſchreibung ſich nach der Methode des Newtons auf eine Zeitfriſt von etlichen Stunden einſchränkte, um eine größere Genauigkeit der Beobachtungen beyzubehalten, mehr ausgedehnet, und einen Bogen der Laufbahne des Kometen, welcher in etlichen Tagen beſchrieben wurde, und in welchem man mehrere Beobachtungen machen könnte, angenommen. Es iſt aber klar, daß man hierdurch der Genauigkeit für die Berechnung der Parabole eines Kometen einen ziemlichen Abbruch gethan; denn Sie werden ganz leicht einſehen, daß man einen ſolchen Bogen der Parabole, welcher binnen etlichen obſchon nicht gar zu ſehr auseinander geſetzten Tagen von dem Kometen beſchrieben wird, und welchen man doch als eine gerade Linie annimmt (§. 4.), nimmer

mit

mit der engſten Genauigkeit wird berechnen können. Es werden alſo diejenige, welche dieſe Methode, für die genaueſte und richtigſte gngeben, mit ihren Gründen nicht hinausſehen. Ich will gar nicht ſagen, wie ſehr ſich der Werth einer vollkommenen Genauigkeit in dieſer Methode wegen der verſchiedenen Zeit der Erſcheinung der Kometen, wegen ihrer Lage, wegen ihres nahen Abſtandes vom Perihelium, wegen ihrer verſchiedenen Geſchwindigkeit, und anderen Nebenurſachen verminderen könne. Man wird alſo mit Wahrheit ſchließen können, daß dieſe Methode für die Berechnung der Kometen zwar nicht die genaueſte iſt, doch aber derſelben ziemlich nahe kömmt.

6. §.

Aber wozu dann dieſes alles? werden Sie mit Ungeduld ausrufen. Ich will es Ihnen ſagen, mein Freund, daß man aus dieſer beſchriebenen, obſchon nicht gar zu genauen Methode einen groſſen Vortheil für die allergenaueſte und richtigſte Berechnung der Kometen ziehen kann; einen ſolchen Vortheil, welchen Sie immer zur Erleichterung des ſo beſchwerlichen Kometen Kalkulus wünſchen können, und an welchen ich nicht eher gedacht habe, als ich eine Antwort auf Ihren letzten Brief ſchicken wollte. Ich dächte, Sie würden damit zufrieden ſeyn, wenn ich Sie verſichere, daß Sie bey Anwendung dieſer Methode nimmer einen Kometen dreymal umſonſt berechnen dürfen, ſo wie Sie ſich deßwegen in Ihrem Briefe beklagten, und welches Ihnen wegen angeführten Urſachen (§. 3.) noch wohl öfters begegnen könnte. Ich will Sie aber noch überdas gewiß verſicheren, daß Sie allzeit ſchon auf das erſtemal die genaueſten Verhältniſſe der zween Abſtände, welche zur genauen und richtigen Berechnung der Kometen nöthig ſind, werden anſetzen können, wenn ſie dieſe Methode zuvor anwenden

werden. Freylich bekommen Sie durch ſelbe nicht die genaueſten Elementen des Kometen (§. 5.): aber ſchon Vortheil genug, daß Sie hernach ohne mehreren Zeitverluſt, ohne die ungewiſſe doch ſo mühſame weitſchichtige Berechnung zu verſuchen, ohne die Furcht noch öfters mit ſo vielem Aufwande der Zeit und unnütz angewandter Mühe ſogleich zu der bekannten Methode, welche wir alſo als die genaueſte und richtigſte aus allen gar nicht abzuſchaffen haben, ſondern nur ungemein erleichteret wird, ſchreiten können. Ich werde weiter unten noch von mehreren Vortheilen dieſer Methode zu reden kommen. Es freut mich alſo ſelbſt, daß ich Ihrem Anſuchen wider meine anfangs gehabte Hoffnung Genügen leiſten kann. Ich werde zu dieſem Ende dieſe erleichterende Methode, wovon Sie ſich aus dem geſagten (§. 5.) noch keinen aufgeklärten Begrif werden machen können, hier was ausführlicher beyſetzen, und zwar zum überzeugenden Beweiſe zugleich zeigen, wie Sie ſelbe auf die Berechnung des letztgeſehenen Kometen anwenden, und Ihren ſo oft wiederhollten Kalkulus glücklicher werden ſchlieſſen können. Glauben Sie mir, daß, wenn es Ihnen doch noch einmal beliebt, für die Berechnung dieſes Kometen einen Verſuch anzuſtellen, Sie damit werden zufrieden ſeyn. Sie fragen etwa: ob die Erfindung möge ganz meine ſeyn? Nein! dieſes nicht. Ich habe es Ihnen ſchon geſagt, daß Newton dieſe Methode ausgedacht, und daß ſie hernach von anderen verbeſſeret worden (§§. 4. 5.); aber nicht zu dieſer Abſicht, welche ich ſelber beſtimme; daß nämlich dieſe Methode zur ſicheren Erleichterung der andern ſchon bekannten und genaueren Methode kann gebraucht werden. Ueberdas, wenn Sie mit einer nicht gar zu genauen Richtigkeit für die Berechnung der Parabole eines Kometen wollen zufrieden ſeyn, ſo mögen Sie auch damit die Elementen des Komets und ſeine ganze Parabole beſtimmen (§. 5.). Doch Sie werden die folgende Ausführung

führung und die sonderliche Anwendung dieser Methode selbst prüfen können. Lassen Sie uns zur Sache gehen.

7. §.

Die Ankündung der Erscheinung des letzt gesehenen Kometen, wie Sie wissen, haben wir dem Herrn Meßier in Frankreich, welcher schon so viele Kömeten durch seine wachtbaren Beobachtungen entdecket hat, zu danken. Er beobachtete selben im jüngst verflossenen Jahre 1769. den 14ten Tag des Augustmonats um 12. Uhr 30′, und setzte seine gerade Ascension auf 38^c 35′ 2″; seine nordliche Abweichung 11^c 49′ 32″. An der Genauigkeit dieser Beobachtung ist alles gelegen, denn nach selber müssen die angenommenen Abstände geprüfet werden; und wenn die nach andern gemachten Beobachtungen und den willkührlichen Abständen berechneten Abweichungen, und gerade Ascension nicht mit dieser überein kommen, so muß man wiederum andere annehmen, und die Berechnung auf das neue wiederhohlen, so, wie es Ihnen ergangen ist.

8. §.

Wir haben aber zur Ausführung und Anwendung der besagten Methode noch andere Beobachtungen nöthig, wovon ich drey aus den in Wien gemachten Beobachtungen, welche in ihrer Zeitfrist, wo selbe auf den hiesigen Observatorien sind angestellt worden, nicht zu sehr entfernet sind. Es sind folgende: I. den 3ten September beobachtete man den Kometen um 14^h 47′ 49″, wo er dann in seiner Länge 2^s 16^c 48′ 40″, in der südlichen Breite aber 16^c 41′ 33″ zählte. II. Den 6ten September um 15^h 54′ 13″ hatte der Komet in seiner Länge 3^s 0^c 35′ 20″; in der Breite 19^c 23′ 27″. III. Den 9ten September um 16^h 12′ 16″ war

die

die Länge des Kometen $3^s\ 17^c\ 0'\ 41''$; seine Breite $23^s\ 32'\ 58''$. Weiters war die Länge der Sonne in der ersten Beobachtung $161^c\ 43'\ 26''$; in der zweyten aber $164^c\ 40'\ 59''$; in der dritten $167^c\ 36'\ 45''$; da indessen der Abstand der Erde von der Sonne nach Ausweisung der Ephemeriden den 3ten September 10.003237; den 6ten 10.002897; den 9ten 10.002575 war. Hier will ich noch die beobachtete Länge seiner Dunstsäule, oder des sogenannten Kometenschweifes, welche bey 40^c, wie auch die Größe seines scheinenden Durchmessers, welcher, wenn wir den wahren Durchmesser des Kometen mit dem englischen Astronomus, dem Hrn. Dunn, dem Durchmesser des Mondes gleich annehmen, bey 17″ ausmachte, beyrücken; selbe können uns etwa noch zum Gebrauche seyn.

9. §.

Nun aber unserm Vorhaben näher zu kommen, so setzen wir, daß T, B, t (I. Fig.) drey verschiedene Orte der Erde sind, aus welchen man an verschiedenen Tagen; nämlich nach den angesetzten Beobachtungen den 3ten, 6ten und 9ten September den Kometen in seiner Laufbahne beobachtet hat. Auf daß man nun den Laufbogen des Kometen, welchen er während dieser drey Beobachtungen beschrieben hat, und welchen man in D, G, d zur Ecliptik bezogen hat, nach angeführter Methode (4. §.) berechnen könne, so ziehe man aus T die zwo Linien TO und TN, welche zu BG und td, der zwoten und dritten Beobachtungslinie parallel und gleich sind, indem selbe wiederum von andern zwoen parallelen und gleichen Linien nämlich $Tt = O\delta$ und $TB = NG$ unterstützet werden. Sie sehen klar, daß diese Veränderung der Figur der vorigen nach den wirklichen Beobachtungen gemachten Entwerfung ganz und gar nicht entgegen sey; weil die Winkel DTN und DEG einander gleich verbleiben.

10. §.

10. §.

Nun kömmt es darauf an, daß man zeige, was für Verhältniſſe, zwiſchen den Abſtänden des Kometen von der Erde und ſeiner Geſchwindigkeit man geſchickt anzuſetzen habe. Wo Sie dann auf dasjenige zu ſehen haben, was ich oben (5. §.) geſagt habe. Es iſt alſo TN : TD = G*d*. *ſin* OTD : D*d*. *ſin* NTO; denn in dem Dreyecke TNO iſt TN : NO = *ſin* TOD : *ſin* NTO; wiederum in dem Dreyecke OD*d* iſt NO ; OD = G*d* : D*d*; und endlich die Analogie des dritten Dreyeckes iſt OD : TD = *ſin* OTD : *ſin* TOD. Wenn wir nun dieſe drey ſonderlichen Proportionen in eine einzele zuſammen ſetzen, ſo wird TN. NO. OD : NO. OD. TD = *ſin* TOD. G*d*. *ſin* OTD : *ſin* NTO. D*d*. *ſin* TOD; und hernach TN : TD = G*d*. *ſin* OTD : D*d*. *ſin* NTO. Das iſt: der Abſtand des Kometen BG = TN von der Erde T in der zweyten oder mittlern Beobachtung verhält ſich zu dem Abſtande TD der erſten Beobachtung; wie ſich das Factum der verfloſſenen Zeit binnen der zweyten und dritten Beobachtung G*d* und des Sinus der Bewegung in der Länge OTD von der erſten zur dritten Beobachtung verhält zu dem Factum der ganzen Zeit zwiſchen der erſten und dritten Beobachtung D*d* und des Sinus der Bewegung in der Länge NTO von der zweyten zur dritten Beobachtung.

11. §.

Auf eine gleiche Weiſe bekömmt man durch das Verhältniß des mittlern Abſtandes des Kometen von der Erde, nämlich TN zu dem dritten Abſtande deſſelben TO, oder *td* (9. §.), welches iſt wie das Verhältniß des Factum der Zeit zwiſchen der erſten und zweyten Beobachtung DG, und des Sinus der Be-

wegung in der Länge DTO von der erſten zur dritten Beobachtung zu dem Factum aus der Zeit zwiſchen der erſten und dritten Beobachtung D*d* und des Sinus NTD der Bewegung in der Länge zwiſchen der erſten und zweyten Beobachtung. Hiemit iſt in dem buchſtablichen Ausdrucke die Analogie TN : TO = DG. *ſin* DTO : D*d*. *ſin* NTD. Denn in den dreyen Dreyecken TND, OD*d*, ODT bekömmt man folgende Proportionen I. TN : ND = *ſin* TDN : *ſin* NTD. II. ND : OD = DG : D*d*. III. OD : TO = *ſin* DTO : *ſin* TDO. Nach geſchehener Zuſammenſetzung dieſer drey Analogien, und Auslöſchung der gleichen Glieder (worunter auch TDN = TDO enthalten ſind) bekömmt man wiederum die vorhergeſetzte Proportion TN : TO = DG. *ſin* DTO : D*d*. *ſin* NTD.

12. §.

Wenn wir alſo in den angeſetzten Proportionen (10. 11. §§.) das Verhältniß des mittlern Abſtandes NT zu den andern zween Abſtänden aus den gegebenen Beobachtungen berechnen, ſo werden wir in den Zahlen folgende Ausdrücke überkommen; nämlich I. NT : TD = 1 : 1, 130336. II. NT : *td* (TO) = 1 : 0, 941495; denn es iſt GD = 263184; G*d* = 260283; D*d* = 523467; NTD = 13° 46′ 40″; NTO = 16° 25′ 21″; DTO = 30° 12′ 1″. Sie ſehen aber, daß uns in dieſen Verhältniſſen die Ausdrücke der Zahlen für die künftige Berechnung ziemlich beſchwerlich ſeyn würden: deßwegen wollen wir ſelbe durch Buchſtaben, welche ihren Werth ausdrücken ſollen, abkürzen. Es ſoll alſo die erſte Proportion (10. §.) durch NT : TD = 1 : *m*; die zweyte (11. §.) durch NT : *td* = 1 : *n* ausgedrücket werden. Weil wir aber nicht noch den wirklichen Werth, ſondern nur davon das Verhältniß wiſſen, ſo nehmen wir indeſſen TN = *x*.

13. §.

13. §.

Doch ehe wir weiter gehen, so ist es vor allen nothwendig, daß ich Ihnen eine Figur zeichne, in welcher die Lage des Kometen und der Erde entworfen wird, und welche, so viel es sich in Zeichnung einer Figur thun läßt, mit den gemachten Beobachtungen (8. §.) übereins kömmt. Es soll also der Zirkel (II. Fig.) indessen eine Ellipse, als die Laufbahne der Erde vorstellen. Die Sonne sey in S, T soll der Ort der Erde heißen, wo man die erste Beobachtung des Kometen in C; und *t* der Ort der Erde, wo man die dritte Beobachtung des Kometen in *c* gemacht hat. D sey der Ort des Kometen, so, wie selber schon zur Ecliptik bezogen ist. Man ziehe nun DT, also zwar, daß DT einen Winkel mache, welcher gleich sey dem Winkel der Differenz von der Länge des Kometen und der Sonne. Die Linie CT stelle den wahren Abstand des Kometen von der Erde vor, und alsdenn ziehe man die Linie CD. Unter eben diesen Bedingnissen ziehe man die Linien *dt*, *ct*, *dc* und vereinige das D*d*, zu welcher aus C eine parallele und gleiche Linie C*i* soll gezogen werden. Weiters vereinige man das C*c*, als den kleinen Bogen des Laufkreises, welchen der Komet binnen der Zeitfrist dieser drey Beobachtungen beschrieben hat. Endlich ziehe man das DT bis in A hinaus, und mit T*t* schließe man das Dreyeck A*t*T. Ich habe gesagt, daß diese Figur den gemachten Beobachtungen gleich kommen soll; denn, obschon keine vollkommene Genauigkeit zur Entwerfung erforderlich, so läßt es sich doch ganz und gar nicht thun, daß man in diesem Stücke bloß seiner Phantasie folge, ohne auf die Aehnlichkeit der Figur mit den gemachten Beobachtungen zurücke zu sehen; denn, wenn man nicht die Winkel DT-S, *dt*S, TS*t* den wirklich beobachteten wenigst obenhin gleich macht, so kann es sich fügen, daß die Linien TD, und

td außer oder innerhalb den AT zusammen stossen, nach welchen denn AT und At entweder alle zwo oder die eine aus diesen Linien als eine positive oder negative Größe muß angesetzet werden.

14. §.

Jetzt müssen wir noch überdas einige buchstabliche Benennungen voraus setzen, welche uns zur Abkürzung des Kalkulus dienen können. Wir heißen also die Tangente der ersten aus der Erde beobachteten Breite des Kometen b; die Tangente aber seiner dritten geocentrischen Breite nennen wir c. Hernach nehmen wir in dem Dreyecke TAt den $cos A = f$; die Seite $AT = g$, und $At = h$. Sie dürfen sich aber durch dieses, daß ich AT und At als bekannt annehme, nicht irre machen lassen; denn, weil die Länge der Sonne für die erste Beobachtung $= 161^c\ 43'\ 26''$; für die dritte aber $= 167^c\ 36'\ 45''$ (8. §.), so folget, daß der Winkel TSt, welcher die Fortrückung der Sonne in ihrer Länge mißt, sey $= 5^c\ 53'\ 19''$. Weiters sind aus den Ephemeriden die Abstände der Sonne von der Erde für jeden Tag der gemachten Beobachtungen bekannt (§. cit.): deßwegen kann man in dem Dreyecke STt die zween Winkel StT und STt sammt der Seite tT finden. Setzt man nun die Winkel TtS und dtS zusammen, so wird der Winkel AtT davon das Komplement seyn: zieht man aber von dem Winkel DTS den Winkel tTS ab, so bleibt der Winkel ATt übrig. Folglich sind in dem Dreyecke AtT zween Winkel und die Seite Tt bekannt, man kann also die zwo Seiten At und AT finden. Es ist nämlich $At = 0,\ 0119062$; und dessen Logarithmus $= 8,\ 0757717$. Hernach ist $AT = 0,\ 0936543$, und der Logarith. davon ist $= 8,\ 9715280$. Ich will hier noch den Werth von einigen von mir berechneten Winkeln und Linien dieser Figur beysetzen, welche zu

dem

dem fernern Kalkulus dieſes Kometen nützen werden. Alſo iſt I. DTS = 84° 54′ 46″. II. ATt = 3° 17′ 50″. III. dtS = 60° 36′ 4″. IV. AtT = 26° 53′ 11″. V. DAd = 30° 12′ 1″. VI. TSt = 5° 53′ 19″. VII. STt = 81° 36′ 56″. VIII. StT = 92° 30′ 45″. IX. Logarith. von Tt = 9, 0171417: der Werth aber des Tt = 0, 1040259.

15. §.

Nun kömmt es darauf an, daß wir uns bemühen, den Werth von Cc als den Laufbogen des Umkreiſes, welchen der Komet binnen den 3 Beobachtungen (8. §.) beſchrieben hat, und, welchen wir indeſſen als eine gerade Linie annehmen (5. §.) zu unterſuchen. Ich habe es ſchon geſagt (4. §.), und Sie ſehen es ſelbſt klar, daß ſich die ganze Auflöſung bloß auf die trigonometriſchen Grundſätze gründe; doch wird es ungemein vortheilhafter ſeyn, wenn wir hier einen Lehnſatz zu Hilfe nehmen, und dadurch der trigonometriſchen Aufgabe: nach zwo gegebenen Seiten und dem enthaltenen Zwiſchenwinkel die dritte Seite des Dreyeckes zu finden, auf eine andere Weiſe, als die gewöhnliche Auflöſungsform iſt, genug thun; denn ſonſt würden wir mit den Differenzen und Semidifferenzen, mit Nachſuchung der Logarithmen für die Sinus und Tangenten noch vieles zu thun bekommen. Es wird alſo gut ſeyn, wenn wir einen kürzern Weg gehen, und beweiſen, daß in einem jeden Dreyecke z. B. in ABC (III. Fig.), in welchem die zwo Seiten BC und AC, welche wir indeſſen M und N nennen, und der Zwiſchenwinkel C (deſſen Coſinus wir = a ſetzen) gegeben werden, die dritte Seite AB allzeit ſey = $M^2 + N^2 - 2MNa$; denn, wenn man auf die Grundlinie AC eine ſenkrechte Linie BE herabfallen läßt, ſo bekömmt man aus der Analogie R : M (CB) = a (cos β) : CE

das $CE = \frac{Ma}{R}$; und weil $R = 1$, so wird $CE = Ma$. Deßwegen ist auch $EA = N(CA) - Ma$; weiters ist $BE^2 = M^2 (CB^2) - M^2 a^2 (\beta E^2)$ und $EA^2 = N^2 - 2MNa + M^2 a^2$. Hiemit wird $AB^2 = BE^2 + EA^2 = M^2 - M^2 a^2 + N^2 - 2MNa + M^2 a^2$; oder $AB^2 = M^2 + N^2 - 2MNa$.

16. §.

Nun wird es wohl nicht mehr so schwer seyn, in dem Dreyecke Cic^c (Fig. II.) aus diesem Lehnsatze (§. 15.) und aus dem vorherangesetzten (§§. 12. 14.) den Werth von Cc^c zu bestimmen; denn es wird $Cc^2 = ci^2 + iC^2$ (dD^2, weil $iC = dD$ §. 9.). Es ist aber aus dem erstgesagten (§. 15.) $Dd^2 = Ad^2 + AD^2 - 2f \times AD \times Ad$ (denn f ist der Cof A Fig. I. §. 14. oder der Cof C Fig. II.). Weil nun $Ad = nx + h$; und $AD = mx - g$ (§§. 12. 14.), so ist auch $AD^2 = m^2 x^2 - 2myx + g^2$; und $Ad^2 = y^2 x^2 + 2hnx + h^2$; und $-2f \times AD \times Ad = -2fmnx^2 + 2fgnx - 2fhmx + 2fgh$. Hernach ist $ic = cd - id$ (CD §. 13.), wo man dann in dem Dreyecke tdc den Werth von cd findet; nämlich $R : c^c = nx (td) : dc = cnx$ (§. 14.); und in dem Dreyecke TDC ist $R : b = mx$ (TD); $DC = bmx = id$: hiemit $ci = cnx - bmx = (cn - bm)x$. Wenn wir nun $cn - bm$ durch t anzeigen wollen, so ist $io^2 = t^2 x^2$. Deßwegen, wenn wir für $ic^2 + iC^2$ den herausgebrachten Werth ansetzen, so bekommen wir $Cc^c = t^2 x^2 + n^2 x^2 + 2hnx + h^2 + m^2 x^2 - 2mgx + g^2 - 2fmnx^2 + 2fgnx - 2fhmx + 2fgh$. Machen wir nun alle Conffizienten von x^2, nämlich $t^2 + n^2 + m^2 - 2fmn = A$; die von x aber, nämlich $2hn - 2mg + 2fgn - 2fhm = B$; endlich $h^2 + g^2 + 2fgh = C$, so haben wir zur Erleichterung der Berechnung

die

die vorige Gleichung ziemlich abgekürzet, und es ist also $Cc^3 = Ax^2 + Bx + C$.

17. §.

Man sieht klar, daß man jetzt vor allen den wirklichen Werth von x, durch welches wir NT, als den mittleren Abstand des Kometen von der Erde angezeiget haben (§. 12.) untersuchen müssen; denn alsdann werden wir durch die obenangesetzten Verhältnisse (§§. 10. 11.) auch den Werth von den Abständen der ersten und dritten Beobachtung; das ist, vom td (TO) und TD (§. 9.) finden, und nach diesen drey bekannten Abständen des Kometen von der Erde seine ganze Parabole berechnen können; so wie ich weiter unten mit mehrerem sagen werde. Dieses zu bewerkstelligen sey (Fig. IV.) in S die Sonne; in T die Erde. C sey der Ort des Kometen in seiner Laufbahne. N sey der Ort des Kometen, in so weit selber schon zur Ecliptik bezogen ist. $TN = x$ (§. 12.) sey der sogenannte abgekürzte Abstand des Kometen (Distantia curtata). Wir werden nun aus der einfachen trigonometrischen Rechnungsform in dem sphärischen Dreyecke N′C′S′, welches bey N′ einen rechten Winkel hat, den Bogen C′S′ oder den Winkel C′TS′, welcher zwischen der Sonne und dem wahren Orte des Kometen ist, finden können. Denn nehmen wir einmal den Cosinus dieses gefundenen Winkels $= a$, und den Radius $= 1$, so ist aus dem gesagten $CS^2 = ST^2 + TC^2 - 2a \times ST \times TC$. (§. 15.). Weil uns nun der Abstand der Erde von der Sonne oder das ST bekannt ist (§. 8.), so sey $ST = d$. Man findet also das TC aus dem Dreyecke NCT, wo $TN = x$ (§. 12.) und der Winkel NTC die beobachtete geocentrische Breite ist (§. 14.), wovon wir also die Secans, welche wir indessen S nennen wollen, wissen. Hiemit ist $R : S = NT(x) : CT = Sx$; und also

CS^2

$CS^2 = d^2 + S^2 x^2 - 2adSx$ (§. 15.), welches ist das Quadrat des Abstandes des Kometen von der Sonne in der mittleren Beobachtung. Nun gleichet nach den newtonischen Grundsätzen * das Quadrat des von einem Kometen beschriebenen Raumes, wenn man selbes mit seinem Abstande multiplicieret, dem Factum des Quadrats des Raumes, welcher von einem jeden anderen Kometen binnen der nämlichen Zeit beschrieben wird, und dessen Abstandes. Deßwegen, wenn man was immer für eines Kometen Raum (a) und Abstand (b) weis, so ist $a^2 b = Cc^2 \times CS$, und alsdann bekömmt man eine Gleichung, aus welcher man das x finden kann. Nun ist aber der Raum und der Abstand eines Kometen, welcher einen mitteren Abstand der Erde von der Sonne haben würde, schon berechnet und bekannt; denn nach des Newtons seinem Kalkulus **) würde ein solcher Komet jeden Tag 2432747 solche Theile in seiner Laufbahne beschreiben, von welchen der mittere Abstand der Erde von der Sonne 100000000 enthält. Deßwegen kann man folgende Gleichung der Verhältnisse ansetzen: In einem Tage durchläuft ein Komet 2432747 Theile, wieviel durchläuft ein Komet in einer Zeit, wo selber in unserem Falle den Bogen Cc durchlaufen hat. Das Quadrat des gefundenen Raumes multiplicire man nun mit dem Abstande von 100000000, und das Product davon heiße man Q, so ist $(Ax^2 + Bx + C) \times \sqrt{(d^2 + S^2x^2 - 2adSx)} = Q$. Und, weil man in dieser Gleichung die Radikalzeichen weglassen muß, so wird $(Ax^2 + Bx + C)^2 \times (d^2 + S^2x - 2adSx) = Q^2$, wo man dann die folgende Gleichung der sechsten Potenz überkömmt.

*) Siehe Lib. I. Princip. Newton. Propos. 16. Coroll. 6.

**) Siehe Lib. III. Princip. Newton. Coroll. Propos. 40.

$$\left.\begin{array}{l} A^2 S^2 x^6 \\ + 2ABS^2 x^5 - 2A^2 adSx^5 \\ + A^2 d^2 x^4 + 2ACS^2 x^4 + B^2 S^2 x^4 - 4ABadSx^4 \\ + 2ABd^2 x^3 + 2BCS^2 x^3 - 4ACadSx^3 - 2B^2 adSx^3 \\ + 2ACd^2 x^2 + B^2 d^2 x^2 + C^2 S^2 x^2 - 4BCadSx^2 \\ + 2BCd^2 x^2 - 2C^2 adx \\ + C^2 d^2 - Q^2 \end{array}\right\} = 0.$$

18. §.

Wenn ich nun aus dieser Gleichung der 6ten Potenze mit Hilfe der zu diesem Ende vom Newton erfundenen bekannten Formel die Wurzel herausziehe, so bekomme ich den bisher gesuchten Werth des $NT = x$ (§. 12.), als des mittleren Abstandes, welchen der Komet in der Ecliptik von der Erde vermög der zweyten Beobachtung (§. 8.) gehabt hat. Ist nun dieser mittlere Abstand oder TN bekannt, so kann durch die oben angesetzten Analogien (§§. 10. 11.) auch der Werth von den anderen zween Abständen (§. 9.) bestimmet werden, welche Sie dann, wenn Sie auf die andere bekannte Methode der Berechnung eines Kometen übergehen wollen, ganz sicher zur ferneren Berechnung annehmen, und versichert seyn können, daß diese überkommenen Abstände den wahren Abständen sehr nahe kommen (§. 5.), und Sie sich also in Ihrem ferneren Kalkulus, welchen Sie durch die bekannte Methode ausführen können, nimmer irren werden; noch minder selbe wiederhohlen dürfen; so wie ich Sie schon oben versicheret habe (§. 6.), und welchen Vortheil ich zu dem Hauptgegenstande dieser Methode gemacht habe (§. cit.). Es ist wahr, diese Methode, obschon sie zur richtigen Ausführung der bekannten Methode, welche doch allzeit, wie ich schon oft gesagt habe, wegen ihrer Genauigkeit keiner anderen weicht, nach unsrer Hauptabsicht nur eine

vorläufige vortheilhafte Anwendung iſt, kann Ihnen etwa wegen Ausziehung der Wurzel der ſechsten Potenze (§. 17.) etwas mühſam vorkommen; doch, weil wir dazu die Formel an der Hand haben, ſo iſt es eben keine ſo mühſame Arbeit. Hernach werden Sie es mir ungebethen eingeſtehen müſſen, daß es doch noch ungemein bequemer und vortheilhafter ſey, durch eine vorläufige Berechnung die zween Abſtände, deren ſonſt ſo ungewiſſe Annehmung die bekannte Methode ſo beſchwerlich macht (§. 3.), ſchon vorher in einer genugſamen Genauigkeit zu überkommen, als die ganze Berechnung in der andern bekannten Methode, wenn die Annehmung der zween willkührlichen Abſtänden nicht geglücket hat, mit ſo vielem Zeitverluſt und umſonſt angewandter Mühe zu groſſem Verdruſſe zu wiederhohlen, wie ich ſchon oben angemerket habe (§. 6.). Setzen Sie hinzu, daß dieſe Methode nicht nur allein nach dem Geſagten für die andere bekannte Methode ſehr vortheilhaft ſey; ſondern ſelbe auch in einem gewiſſen Falle zur Berechnung eines Kometen von einem genugſamen Gebrauche ſey, wenn nämlich ein Komet nur durch etliche Tage (welches ſich nach Ausweiſung der Theorie der Kometen öfters fügen kann) kann beobachtet werden, und alſo dieſe Methode, weil der Laufbogen des Kometen binnen ſo enger Zeitfriſt ziemlich klein ſeyn wird, mehr Genauigkeit verſpricht (§. 5.). Ja ſelbe mag in dieſem Falle, wo man nicht ſo viele auseinandergeſetzte Beobachtungen machen kann, wohl gar der anderen bekannten Methode vorgezogen werden; denn es iſt gewiß, daß die Genauigkeit und Richtigkeit der Letzteren meiſtens von den vielen und auseinander geſetzten Beobachtungen abhängt. Ich dächte alſo, es werde Ihnen angenehm ſeyn, wenn ich Ihnen dieſe vortheilhafte Methode in ihrem ganzem Umfange zeige. Dieſes zu bewerkſtelligen, darf ich nur die angefangene Berechnung des letzt erſchienenen Kometen in eben dieſer

Metho-

Methode zu Ende bringen. Damit Sie aber erkennen, daß diese Methode allgemein sey, und auf einen jeden Kometen möge angewandt werden, so will ich Ihnen die weitere Berechnungsart durch allgemeine Ausdrücke zeigen. Ich werde hernach zum Schlusse die von mir berechneten Elementen dieses letztgesehenen Kometen, welcher, wie Sie ganz leicht aus dem Gesagten begriefen werden, sich durch die beyden Methoden berechnen läßt, beyrücken.

19. §.

Nachdem ich also den Werth von $NT = x$ als den mittleren Abstand des Kometen (12. §.) durch Ausziehung der Wurzel der sechsten Potenze (17. §.), und also auch den Werth von den andern zween Abständen gefunden habe (10. 11. §§.), so wird es ein leichtes seyn, alle noch übrigen unbekannten Größen welche zur endlichen Berechnung der Parabole noch nöthig sind, in der zweyten Figur zu bestimmen. Also finde ich z. B. I. den Werth von DC; denn es ist $R : b$ (der Tangente der ersten geocentrischen Breite 14. §.) $= TD : DC$. II. den Werth von dc; denn es ist $R : c$ (der Tangente der dritten geocentrischen Breite) $= td : dc$. III. den Werth von Dd^2; denn es ist $dD^2 = Ci^2$ (9. §.) $= AD^2 + Ad^2 - 2\,cos\,A \times AD \times Ad$ (16. §.). IV. den Werth von Co; denn es ist $Cc^2 = iC^2 + ic^2$ (16. §.), und $ic = cd - CD$ (13. §.). V. den Werth von SD und Sd als den zween abgekürzten Abständen des Kometen von der Sonne (17. §.); denn es ist $SD^2 = ST^2 + TD^2 - 2\,cos\,STD \times ST \times TD$; und $Sd^2 = St^2 + td^2 - 2\,cos\,Std \times St \times td$ (15. §.). VI. den Werth des Winkels dSD, welcher die Bewegung des Kometen in seiner heliocentrischen Länge mißt; denn in dem Dreyecke SdD sind aus dem erstgesagten alle drey Seiten schon bekannt. VII. den Werth des Winkels der ersten,

welche wir M, und der dritten heliocentrischen Breite, welche wir *m* heißen wollen; denn es ist S D : D C = R : *tang* M. Hernach S *d* : *dc* = R : *tang m*. VIII. den Werth vom S C, als den Radius Vector der ersten, und vom S *c* als dem Radius Vector der dritten Beobachtung; denn es ist R : *sec* M = S D : S C, und wiederum R : *sec m* = S *d* : S *c*. IX. den Werth des Winkels *c* S C, welcher die Differenz der zwoen Anomalien ist; denn in dem Dreyecke S *c* C sind alle drey Seiten bekannt.

20. §.

Weil nun die zween Radii Vectores und die Differenz zwoer Anomalien bekannt sind (§. 19. VIII. IX.), so kann man den Werth der beyden wahren Anomalien finden; und dieses durch die bekannte Formel, durch welche wir folgende Gleichung der Verhältnisse überkommen, daß nämlich die Summe der zwoen Wurzeln von den zween Abständen des Kometen, oder den zween Radiis Vectoribus zur Differenz eben derselben Wurzeln sich verhält, wie sich verhält die Cotangente des vierten Theiles der Summe der zwoen Anomalien zur Tangente des vierten Theils der Differenz derselben. Ist die Anomalie bekannt, so überkömmt man auch den Abstand des Perihelium, welcher dem Quadrate des Cosinus der halben wahren Anomalie gleichet, wenn selbes Quadrat mit dem Radius Vector multiplicieret, und durch das Quadrat des ganzen Sinus dividieret wird. Hernach verhält sich die Quadratwurzel des Cubus vom Abstande des Perihelium zur Einheit, wie sich der Zwischenraum des Perihelium und der Zeit, wo der Komet die gegebene Anomalie gehabt hat, zur Zeit verhält, in welcher ein anderer schon berechneter oder sogenannter Tafelkomet (Cometa tabularis) die nämliche Anomalie hat, wo man dann die Zeit findet, an welcher der Komet seinen nächsten Abstand hat. Nun weiters die Länge des Kno-

ten

ten und die Neigung der Laufbahne des Kometen zu finden, will ich Ihnen zu einem leichteren Begrife eine sonderliche Figur zeichnen, welche sich aber auf die vorige zweyte Figur beziehet. Es sey also E H (Fig. V.) ein Bogen von der Ecliptik, D und *d* sollen die zween Orte des Kometen vorstellen, so wie selbe zur Ecliptik bezogen sind; hiemit wird der Bogen D *d* die heliocentrische Bewegung des Kometen in seiner Länge anzeigen. D C und *d c* sollen die zwo heliocentrischen Breiten des Kometen seyn: wo man dann diese zween Bögen so weit hinaus ziehen soll, bis selbe in P als dem Polus der Ecliptik zusammenstossen. Man ziehe ferner C *c* bis zur Ecliptik, und in dem Puncte ☊, wo dieser Bogen die Ecliptik berührt, wird der Knoten der Laufbahne des Kometen anzutreffen seyn. Weil nun in dem Dreyecke C D ☊ nur zwo Größen bekannt sind, nämlich die Seite D C (§. 19. VII.) und der rechte Winkel bey D, so nehme man das Dreyeck P C *c* zu Hilfe, in welchem die Bögen P C und P *c* als die Complemente der zwoen Breiten des Kometen bekannt sind (§. cit.), wie auch der Winkel *c* P C, als welcher die Bewegung des Kometen in der Länge mißt. (§. 19. VI.) Man kann also in diesem Dreyecke *c* P C den Winkel P C *c* finden, und hiemit bekömmt man auch in dem Dreyecke C ☊ D dem Winkel D C ☊, welcher dem vorigen als seinem Verticalwinkel gleich ist, wo man dann den Bogen D ☊ berechnen kann. Deßwegen, wenn man die Länge des Knoten finden will, so darf man nur den gefundenen Bogen zu der Länge des D hinzuthun, oder von selbem wegziehen, nachdem nämlich ein Komet ehender oder später den Knoten als den Punct D berühret. Die Länge aber des Puncts D ist bekannt; denn in dem Dreyecke T D S (Fig. II.) ist der Werth des Winkels D S T, wie auch die Länge des Puncts T oder der Erde in der ersten Beobachtung bekannt, zu welcher, wenn wir den Winkel bey S^c hinzu-

ſetzen, bekommen wir die Länge des Puncts D. Endlich iſt es aus dem, was wir jetzt geſagt haben, klar, daß man in eben dieſem Dreyecke DC☊ (Fig. V.) den Winkel C☊D alſo auch die Neigung der Laufbahne des Kometen finden könne. Nun iſt nichts mehr übrig, als das wir die Länge des Perihelium beſtimmen, wofür ich wiederum eine beſondere Figur zeichne. Es ſey alſo ♈π (Fig. VI.) ein Bogen der Ecliptik, ☊P ſey ein Bogen, welcher die Laufbahne des Kometen vorſtellt. Weil für den Punct C die Anomalie oder der Winkel CSP aus dem Geſagten dieſes Abſatzes bekannt iſt, ſo werden wir den Werth des Bogen P☊ finden, wenn wir nämlich dieſem Winkel den Bogen C☊, welchen wir ſchon oben aus dem vorigen Dreyecke CD☊ (Fig. V.) überkommen haben, hinzufügen. Hernach wiſſen wir aus dem erſtgeſagten den Winkel π☊P als die Neigung der Laufbahne des Kometen, wie auch den Winkel ☊πP, welcher ein rechter Winkel iſt. Man kann alſo den Bogen π☊ finden, welchen, wenn wir ſelben zur Länge des Knoten hinzuthun, uns die Länge des Perihelium giebt.

21. §.

Weil nun alles, was bisher von dieſer Methode geſagt worden, auf den letztgeſehenen Kometen nach den gemachten Beobachtungen (§§. 7. 8.) iſt angewandt worden, ſo darf man nur ſtatt der vorgeſetzten allgemeinen Ausdrücken (§§. 19.) den wirklichen Werth in Zahlen einrücken, und man wird alsdann deſſelben Elemente beſtimmen können, welche nach unſerer Berechnung folgende ſind. I. Die Zeit des Perihelium hatte man auf den 7ten Octobers, die Zurückkunft des Kometen auf den 28ten deſſelben anzuſetzen. II. ☊ oder der aufſteigende Knoten des Kometen iſt in ♍ oder im Geſtirne der Jungfrau bey dem 23ᵉ anzutreffen. III. Die

Nei-

dert und neun Nullen zur Einheit: so muß dann im Gegen-
um so weniger Masse in dem äußersten Theile der Dunstsäu-
s Kometen sich befinden, als in dem Abstande eines halben
essers der Erde ist. Nun, wenn man die Grundlinie mit
des Kögels, welche in Rücksicht auf diesen Kometen
multiplicieret, so bekömmt man die ganze Masse dieses
ist aber der körperliche Inhalt dieser Dunstsäule als
$= \frac{1}{60000000}$ Theile der ganzen Sphäre, in welche
eines Durchmessers von einem Zolle ist ausgedeh-
mit bekömmt man für den Ausdruck der Masse von
ieses Kometen eine Fraction, dessen Zähler eine
, der Nenner aber 42 mit hundert und sechszehen Nul-
n. Sie sehen also, daß die Dünne der Dunstsäule dieses Kometen sehr ungemein ist. Die gemachten Beobachtungen bekräftigen das Gesagte; denn man sah die Fixsterne durch die Dunstsäule dieses Kometen ohne die mindeste Refraction durchscheinen. Wollen wir von der Dünne dieser Dunstsäule auf die Dünne der Dunstsäulen von anderen Kometen schließen; so könnten wir wohl einen Whiston fragen, wie er einen solchen Gewalt der Gewässer aus der so ungemein dünnen Atmosphäre eines Kometen habe beyschaffen können; oder wie dann seine Vorsage bestehen könne, daß beym Untergang unserer Erde eine so sehr dünne Atmosphäre unsere Erde in Brand stecken würde. Doch davon, wie auch von seiner Berechnung des Kometen, welcher zur Zeit der Sündfluth soll erschienen seyn, hätte ich Ihnen vieles noch zu sagen.*

*) Ich mache indessen die einzige Anmerkung, daß die Berechnung des Whistons für seinen Kometen, wovon er in seiner Theorie der Erde redet, ganz und gar unrichtig sey; denn, obschon selbe

nach dem Geſagten folgende Analogie anſetzet, ſo iſt R. tang. 40 = 5878960 : x = 4270760, und alſo x oder die geſuchte Länge der Dunſtſäule dieſes Kometen = 4270760 deutſchen Meilen.

24. §.

Die Dünne der Dunſtſäule dieſes Kometen zu beſtimmen, ſo wollen wir indeſſen annehmen, daß die Kometen mit Atmoſphären, wie unſere Erde, umgeben ſind. Nach angenommenen dieſen Heiſcheſatz beweiſet Newton, * daß, wenn man ein Sphärchen, welches in ſeinem Durchmeſſer nur einen Zoll faßte, in die Entfernung eines halben Durchmeſſers der Erde, das iſt 860 deutſcher Meilen (§. 23.), über den Kern des Kometen übertrüge, ſelbes ſich ſo ſehr ausdehnen würde, daß es ſich über die Sphäre des Saturnus als des entfernteſten Planeten ausbreiten würde. Ueberdas würde dieſes Sphärchen, wenn man die Ausdehnungskräfte in dem umgekehrten Verhältniſſe der drückenden Maſſen oder Schweren annimmt, einen Raum von 183025200000 cubiſchen deutſchen Meilen einnehmen. Wir wollen alſo unterſuchen, was für einen Theil von dieſer übergroſſen Sphäre des Saturnus die Dunſtſäule des Kometen, welche in ihrer äußerſten Breite etwa $1\frac{1}{2}$. Grad hatte, ausmache. Weil man dieſe Dunſtſäule des Kometen als einen geſtumpften Kögel betrachten kann, welcher in ſeiner Länge 427060 deutſche Meilen mißt (§. 23.) ſo bekömmt man nach der gemeinen Rechnungsform des körperlichen Inhalts eines Kögels ſelbe = $\frac{1}{6000000}$ Theile der ganzen Sphäre des Saturnus. Weil aber nach der newtonianiſchen Berechnung die Dünne der Atmoſphäre eines Kometen in dem äußerſten Theile der Dunſtſäule ſich zur Dünne in dem Abſtande eines halben Durchmeſſers der Erde verhält, wie die Zahl 7 mit hun-

*) Siehe Newton. Tom. II. Opuſc. XVII. pag. 54 et ſequ. Edit. Lauſannae et Geneu.

hundert und neun Nullen zur Einheit: so muß dann im Gegentheile um so weniger Masse in dem äußersten Theile der Dunstsäule eines Kometen sich befinden, als in dem Abstande eines halben Durchmessers der Erde ist. Nun, wenn man die Grundlinie mit der Höhe des Kögels, welche in Rücksicht auf diesen Kometen 4270760, multiplicieret, so bekömmt man die ganze Masse dieses Kögels. Es ist aber der körperliche Inhalt dieser Dunstsäule als eines Kögels = $\frac{1}{6000000000}$ Theile der ganzen Sphäre, in welche ein Sphärchen eines Durchmessers von einem Zolle ist ausgedehnet worden: hiemit bekömmt man für den Ausdruck der Masse von der Dunstsäule dieses Kometen eine Fraction, dessen Zähler eine Einheit ist, der Nenner aber 42 mit hundert und sechszehen Nullen. Sie sehen also, daß die Dünne der Dunstsäule dieses Kometen sehr ungemein ist. Die gemachten Beobachtungen bekräftigen das Gesagte; denn man sah die Fixsterne durch die Dunstsäule dieses Kometen ohne die mindeste Refraction durchscheinen. Wollen wir von der Dünne dieser Dunstsäule auf die Dünne der Dunstsäulen von anderen Kometen schließen; so könnten wir wohl einen Whiston fragen, wie er einen solchen Gewalt der Gewässer aus der so ungemein dünnen Atmosphäre eines Kometen habe beyschaffen können; oder wie dann seine Vorsage bestehen könne, daß beym Untergang unserer Erde eine so sehr dünne Atmosphäre unsere Erde in Brand stecken würde. Doch davon, wie auch von seiner Berechnung des Kometen, welcher zur Zeit der Sündfluth soll erschienen seyn, hätte ich Ihnen vieles noch zu sagen.*

*) Ich mache indessen die einzige Anmerkung, daß die Berechnung des Whistons für seinen Kometen, wovon er in seiner Theorie der Erde redet, ganz und gar unrichtig sey; denn, obschon sel-

be

nach dem Gesagten folgende Analogie ansetzet, so ist R. tang. 40 = 5878960 : x = 4270760, und also x oder die gesuchte Länge der Dunstsäule dieses Kometen = 4270760 deutschen Meilen.

24. §.

Die Dünne der Dunstsäule dieses Kometen zu bestimmen, so wollen wir indessen annehmen, daß die Kometen mit Atmosphären, wie unsere Erde, umgeben sind. Nach angenommenen diesen Heischesatz beweiset Newton, * daß, wenn man ein Sphärchen, welches in seinem Durchmesser nur einen Zoll faßte, in die Entfernung eines halben Durchmessers der Erde, das ist 860 deutscher Meilen (§. 23.), über den Kern des Kometen übertrüge, selbes sich so sehr ausdehnen würde, daß es sich über die Sphäre des Saturnus als des entferntesten Planeten ausbreiten würde. Ueberdas würde dieses Sphärchen, wenn man die Ausdehnungskräfte in dem umgekehrten Verhältnisse der drückenden Massen oder Schweren annimmt, einen Raum von 18302520000000 cubischen deutschen Meilen einnehmen. Wir wollen also untersuchen, was für einen Theil von dieser übergrossen Sphäre des Saturnus die Dunstsäule des Kometen, welche in ihrer äußersten Breite etwa $1\frac{1}{2}$. Grad hatte, ausmache. Weil man diese Dunstsäule des Kometen als einen gestumpften Kögel betrachten kann, welcher in seiner Länge 427060 deutsche Meilen mißt (§. 23.) so bekömmt man nach der gemeinen Rechnungsform des körperlichen Inhalts eines Kögels selbe = $\frac{1}{8000000}$ Theile der ganzen Sphäre des Saturnus. Weil aber nach der newtonianischen Berechnung die Dünne der Atmosphäre eines Kometen in dem äußersten Theile der Dunstsäule sich zur Dünne in dem Abstande eines halben Durchmessers der Erde verhält, wie die Zahl 7 mit hun-

*) Siehe Newton. Tom. II. Opusc. XVII. pag. 54 et sequ. Edit. Lausannae et Geneu.

Nehmen wir nun einmal die Wirkung der anziehenden Kraft des Mondes in Rückſicht auf die Fluthe des Meeres, und ſetzen wir ſelbe in ein Verhältniß mit der wirkenden Anziehungskraft des Kometen. Weil aber das Verhältniß des Abſtandes des Mondes von der Erde zu dem Abſtande des Kometen von der Erde durch 1 : 114 mag ausgedrücket werden; denn der Mond iſt von uns 60 halbe Durchmeſſer der Erde oder 51600 deutſche Meilen, der Komet aber vermög des vorhergeſetzten Abſtandes 5878960 deutſche Meilen entfernet (§§. 21. 23.), welche beyde Abſtände unter ſich alſo das nämliche Verhältniß haben, wie 1 : 114. Nun ſind aber die Wirkungen der anziehenden Kräften in einem umgekehrten gezweyfältigten (ratione dupplicata) Verhältniße der Abſtände: hiemit bekommen wir für das Verhältniß der Wirkungen der anziehenden Kraft des Kometen auf die Erde, und der nämlichen Kraft des Mondes auf die Erde in Zahlen, wie 1 : 12996. Es iſt alſo die Wirkung der anziehenden Kraft des Kometen der $\frac{1}{12996}$ Theil von der anziehenden Kraft des Mondes. Da nun der Mond in ſeinem nächſten Abſtande nur eine gemäßigte Fluthe des Meeres durch ſeine Anziehungskraft bewirket, wie ſollte man wohl auch nur wahrſcheinlicher Weiſe der Anziehungskraft des erſchienenen Kometen, welche nach dem Bewieſenen gleichſam als ein unmerklicher Theil der Anziehungskraft des Monds kann angeſehen werden, die thätige Urſache ſo heftiger Ueberſchwemmungen zumuthen können? Hernach, weil wir für die Anziehungskraft des Kometen die Analogie der Anziehungskraft des Mondes, wegen Gleichheit ihrer Maſſen beybehalten können, ſo würden wir in beyden wohl auch auf die Gleichheit noch anderer Nebenumſtände ſchließen können. Alſo z. B. der Mond verurſachet durch ſeine anziehende Kraft die Fluthe des Meeres nur in ſeinem nächſten Abſtande; und zwar erſt ein oder zween Tage nach ſelbem. Wiederum die Fluthe, welche von dem Mond

verurſachet wird, iſt ziemlich mittelmäßig, aber doch allgemein in allen Meeren: da hingegen nach dem Zeugniſſe der in Zeitungen gegebenen Berichten dieſe ſtürmenden Ueberſchwemmungen nur in dem einzigen Amerika am Ende des Auguſtmonaths ſich äußerten; da doch der Komet, wenn wir auch nicht auf die ſo ungemein verſchiedenen Abſtände des Kometen und des Mondes von der Erde ſehen wollten, ſeinen nächſten Abſtand erſt bey dem 10ten Sept. hatte ꝛc. ꝛc. Wir wollen es alſo immer glauben, daß dieſe gemachte Muthmaſſung niemals der Gedanke eines geſchickten Aſtronomus geweſen ſey.

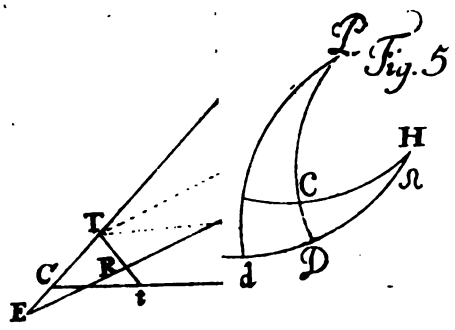


Fig. 5

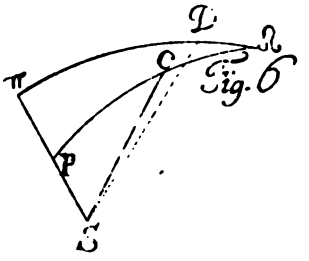


Fig. 6

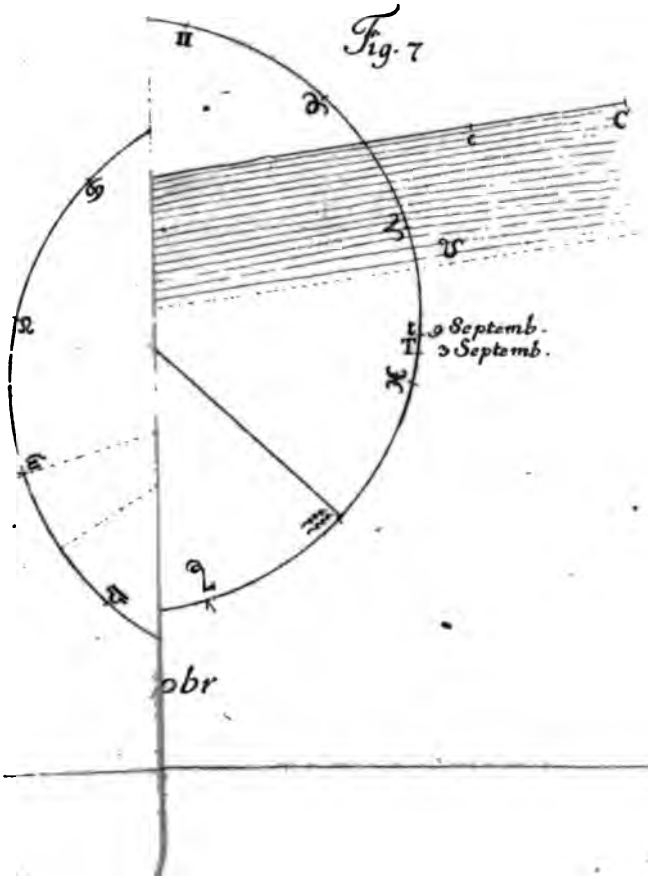


Fig. 7

verurſachet wird, iſt ziemlich mittelmäßig, aber doch allgemein in allen Meeren: da hingegen nach dem Zeugniſſe der in Zeitungen gegebenen Berichten dieſe ſtürmenden Ueberſchwemmungen nur in dem einzigen Amerika am Ende des Auguſtmonaths ſich äußerten; da doch der Komet, wenn wir auch nicht auf die ſo ungemein verſchiedenen Abſtände des Kometen und des Mondes von der Erde ſehen wollten, ſeinen nächſten Abſtand erſt bey dem 10ten Sept. hatte ꝛc. ꝛc. Wir wollen es alſo immer glauben, daß dieſe gemachte Muthmaſſung niemals der Gedanke eines geſchickten Aſtronomus geweſen ſey.

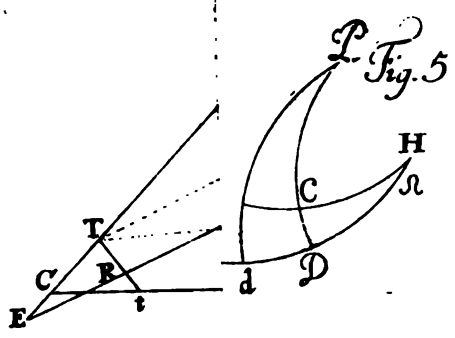


Fig. 5

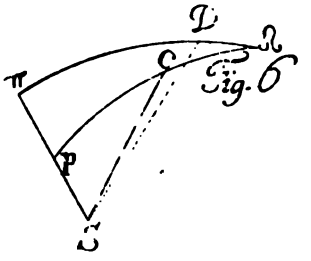
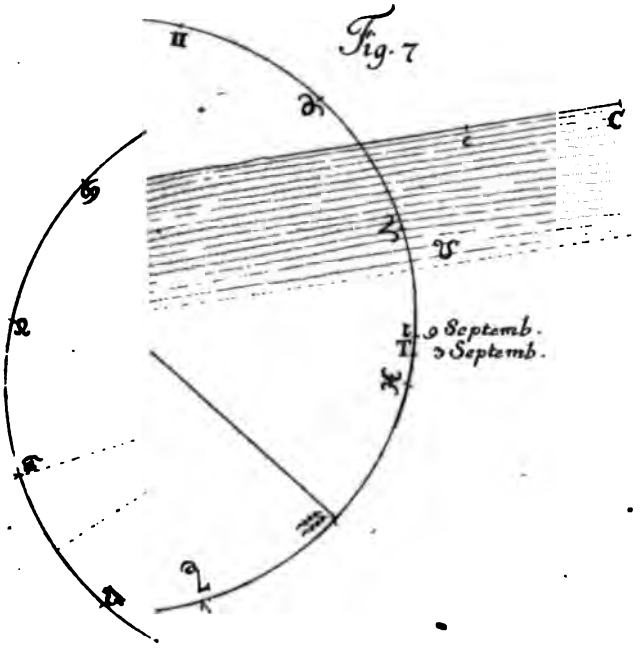


Fig. 6

Fig. 7



obr

Von dem unterirdiſchen Baue bey Bergwerken überhaupt.

Ich muß zum voraus erinnern, daß hier nicht lauter Neues geſagt werden wird; denn um des Neuen willen muß verſchiedenes, was in den alten Bergbüchern ſtehet, mit berühret werden; es ſoll aber in möglichſter Kürze geſchehen, weil in jenen Büchern weiter darüber nachgeſchlagen werden kann. Was ich zu ſagen willens bin, iſt nur in Abſicht auf die Art der Anwendung bey dem unterirdiſchen Baue bey Bergwerken neu und ſoll unter dem Alten in gewiſſen wenigen Abſchnitten dieſer Schrift erſcheinen. Ich werde einige bekannte Sätze anführen, die bey dem unterirdiſchen Baue bey Bergwerken mit Nutzen angewandt werden können, in den alten Bergbüchern aber nicht erwähnet ſind. Endlich will ich eine Schachtzimmerung und Mauerung vorſchlagen, die ihrer Feſtigkeit und Dauer wegen bauver-

ſtändigen Bergleuten vieleicht nicht mißfallen dürfte. Glauben ſie, daß dieſe Bauart noch einige Verbeſſerung nöthig habe, ſo bin ich wohl zu frieden, wenn es mit Grunde geſchiehet und ich nur die Gelegenheit dazu gegeben habe. Ich wende mich nunmehr zu dem, was ich von dem unterirdiſchen Baue bey Bergwerken zu ſagen habe:

Die Bergleute brauchen das Wort Bauen in mancherley Bedeutung. Wenn ſie Bergwerk überhaupt betreiben, ſo heißet es bey ihnen, Bergwerk bauen; dahin rechnen ſie alſo alle Bergwerksgeſchäfte, die ſowohl über, als unter der Erde zum Bergwerk gehören; beſonders aber bauen ſie über der Erde, oder am Tage, wenn ſie Huth- oder Zechenhäuſer, Kauen, Göpel, Waſſerkünſte, Pochwerke, Erztwäſchen, Schmelzhütten, Schmelzöfen, Waſſerläufe, Reiche und dergleichen aufrichten und anlegen. Ferner bauen ſie unter der Erde, dieſes geſchiehet auf zweyerley Weiſe:

Erſtlich, wenn ſie die Erd- und Steinlagen eines Gebürges nach ihrer Abſicht mit Röſchen, Schürfen, Stollen, Schächten, Strecken, Geſenken, Schlöthen oder Ueberſichbrechen, Hornſtädten, Querſchlägen, Flügel Oertern vermittelſt ihrer Bergwerkzeuge, als Schlägel, Eiſen, Bohrer, Keilhauen, Kratzen, Keilen, ꝛc. durchbrechen.

Zweytens, wenn ſie das lockere, loſe Geſtein, ſo klüftig iſt, oder Erde, Sand, Kieß, Gerölle unter der Erde mit Zimmer- oder Mauerwerk verwahren und vor dem Einſturz ſicher ſtellen, Waſſerkünſte daſelbſt errichten, Fahrten in die Schächte, Geſenke und Schlöthhengen, Bühnen, Kaſten und Spreitzen ſchlagen, Trageſtempel, Einſtriche und Stege legen, Thürſtöcke ſetzen, die ſich gezogenen und abgelöſeten Steinfelſen und Wände mit Holz

und

und Steinen unterſchlagen, oder unterwölben, daß ſie ſtehen bleiben, nicht ſtürzen, und dergleichen mehr.

Dieſe letztern Geſchäfte gehören zwar alle zu dem unterirdiſchen Baue bey Bergwerken; allein ich würde zu weit von meinem Zwecke abkommen, wenn ich von allem handeln wollte. Ich habe mir vorgeſetzt, nur das, was eigentlich den Bau durch die Erd- und Steinlagen, und die Verwahrung derſelben vor dem Einſturz angehet, in Betrachtung zu ziehen, das übrige aber den Steigern und Zimmerlingen zu überlaſſen.

Ich ſetze voraus, daß das Gebürge, in welchem ein unterirdiſcher Bau angeſtellet werden ſoll, mit Erzgängen, oder Mineralagern geſegnet ſey, ſo entweder ſchon entdeckt, oder vermittelſt gewiſſer Anzeigen vermuthlich in demſelben vorhanden ſind.

In meiner bergmänniſchen Erdbeſchreibung in dem 2ten Bande der churfürſtlich-baieriſch-akademiſchen Abhandlungen habe ich gezeiget, daß die ganze Erde ein Flötz ſey, die Berge und Hügel aber nur als von unterirdiſchen Bewegungen, oder andern Urſachen verurſachte Abweichungen zu betrachten wären, da verſchiedene Flötzlagen von ſolchen Bewegungen entweder gehoben, und aus einer ſchwebenden faſt wagerechten in eine ſteilere und bisweilen gar ſenkrechte Stellung gebracht, oder manche Hügel und Berge durch Waſſerfluthen aufgeſetzt worden. Der unterirdiſche Bau bey Bergwerken wird alſo entweder in faſt wagerechtliegenden, oder in erhobenen Erd- und Steinlagen angeſtellet werden können. Hieraus ergeben ſich zween Gegenſtände; der eine betrift den unterirdiſchen Bau bey Bergwerken in faſt wagerecht liegenden, der andere in erhobenen Erd- und Steinlagen. Bey beyden muß darauf gedacht werden, wie der Bau nicht allein auf die

ſtändigen Bergleuten vieleicht nicht mißfallen dürfte. Glauben ſie, daß dieſe Bauart noch einige Verbeſſerung nöthig habe, ſo bin ich wohl zu frieden, wenn es mit Grunde geſchiehet und ich nur die Gelegenheit dazu gegeben habe. Ich wende mich nunmehr zu dem, was ich von dem unterirdiſchen Baue bey Bergwerken zu ſagen habe:

Die Bergleute brauchen das Wort Bauen in mancherley Bedeutung. Wenn ſie Bergwerk überhaupt betreiben, ſo heißet es bey ihnen, Bergwerk bauen; dahin rechnen ſie alſo alle Bergwerksgeſchäfte, die ſowohl über, als unter der Erde zum Bergwerk gehören; beſonders aber bauen ſie über der Erde, oder am Tage, wenn ſie Huth- oder Zechenhäuſer, Kauen, Göpel, Waſſerkünſte, Pochwerke, Erztwäſchen, Schmelzhütten, Schmelzöfen, Waſſerläufe, Reiche und dergleichen aufrichten und anlegen. Ferner bauen ſie unter der Erde, dieſes geſchiehet auf zweyerley Weiſe:

Erſtlich, wenn ſie die Erd- und Steinlagen eines Gebürges nach ihrer Abſicht mit Röſchen, Schürfen, Stollen, Schächten, Strecken, Geſenken, Schlöthen oder Ueberſichbrechen, Hornſtädten, Querſchlägen, Flügel Oertern vermittelſt ihrer Bergwerkzeuge, als Schlägel, Eiſen, Bohrer, Keilhauen, Kratzen, Keilen, ꝛc. durchbrechen.

Zweytens, wenn ſie das lockere, loſe Geſtein, ſo klüftig iſt, oder Erde, Sand, Kieß, Gerölle unter der Erde mit Zimmer- oder Mauerwerk verwahren und vor dem Einſturz ſicher ſtellen, Waſſerkünſte daſelbſt errichten, Fahrten in die Schächte, Geſenke und Schlöthhengen, Bühnen, Kaſten und Spreitzen ſchlagen, Trageſtempel, Einſtriche und Stege legen, Thürſtöcke ſetzen, die ſich gezogenen und abgelöſeten Steinfelſen und Wände mit Holz

und

und Steinen unterschlagen, oder unterwölben, daß sie stehen bleiben, nicht stürzen, und dergleichen mehr.

Diese letztern Geschäfte gehören zwar alle zu dem unterirdischen Baue bey Bergwerken; allein ich würde zu weit von meinem Zwecke abkommen, wenn ich von allem handeln wollte. Ich habe mir vorgesetzt, nur das, was eigentlich den Bau durch die Erd- und Steinlagen, und die Verwahrung derselben vor dem Einsturz angehet, in Betrachtung zu ziehen, das übrige aber den Steigern und Zimmerlingen zu überlassen.

Ich setze voraus, daß das Gebürge, in welchem ein unterirdischer Bau angestellet werden soll, mit Erzgängen, oder Mineralagern gesegnet sey, so entweder schon entdeckt, oder vermittelst gewisser Anzeigen vermuthlich in demselben vorhanden sind.

In meiner bergmännischen Erdbeschreibung in dem 2ten Bande der churfürstlich-baierisch-akademischen Abhandlungen habe ich gezeiget, daß die ganze Erde ein Flötz sey, die Berge und Hügel aber nur als von unterirdischen Bewegungen, oder andern Ursachen verursachte Abweichungen zu betrachten wären, da verschiedene Flötzlagen von solchen Bewegungen entweder gehoben, und aus einer schwebenden fast wagerechten in eine steilere und bisweilen gar senkrechte Stellung gebracht, oder manche Hügel und Berge durch Wasserfluthen aufgesetzt worden. Der unterirdische Bau bey Bergwerken wird also entweder in fast wagerechtliegenden, oder in erhobenen Erd- und Steinlagen angestellet werden können. Hieraus ergeben sich zween Gegenstände; der eine betrift den unterirdischen Bau bey Bergwerken in fast wagerecht liegenden, der andere in erhobenen Erd- und Steinlagen. Bey beyden muß darauf gedacht werden, wie der Bau nicht allein auf die

Die wagrechte Durchbrechung gedachter Lagen, wenn ſie weit in das Gebürge getrieben werden muß, verurſachet, ſowohl im rolligen, als feſten Gebürge, langweilige, beſchwerliche und koſtbare Bergförderniß und Arbeit, ſie erfordert öfters viel Holz, Bretterwerk und Zimmerung, der Wettermangel ſtellet ſich endlich ein, und iſt gleichwohl wegen der Waſſerloſung eines Gebürges die allernöthigſte.

Die flache Durchbrechung verurſachet beſchwerliche Förderniß, koſtet, wenn das hangende Geſtein nicht feſt genug iſt, viel Zimmerung oder Mauerung, und wird, wenn ſie gar zu flach iſt, im Ein- und Ausfahren zu beſchwerlich, vernützet auch viel Seil, Kübel, Holz und Bretterwerk.

Die ſenkrechte Durchbrechung wird dem Bergmanne im Ein- und Ausfahren beſchwerlich, bey der Arbeit in faſt ebenliegenden Steinlagen oder ſogenannten Flötzgeſteine ſauer, koſtet viel Zeit und Geld, der Wettermangel ſtellet ſich bald ein, die Berg- und Erzförderniß koſtet viel Seil, Kübel und Schmiere, wie auch noch über dieß im rolligen und klüftigen Geſteine viel Zimmerung oder Mauerung.

Die wagrechten Durchbrechungen nennet man Röſchen, Stollen, Strecken, Querſchläge, Flügelörter, Schieferfahrten; ſie werden auch ſöhlige Durchbrechungen genannt.

Die flachen donnlegigen Durchbrechungen heißet man flache, die ſenkrechten oder ſaigern aber ſaigere Schächte, Schürfe, Geſenke, Schlöthe oder Ueberſichbrechen.

Bey Erwählung einer dieſer Durchbrechungsarten zum vorzunehmenden unterirdiſchen Bergbaue iſt es nicht gleichgültig, mit welcher der Bauende den Anfang machen will, ſondern er muß erſt auf die Lage des ganzen Gebürges, und denn auf die Lage ſeines Geſteines ſehen, das er zu bearbeiten hat, ſo wird er urtheilen können, mit welcher Art der Durchbrechung deſſelben am füglichſten der Anfang zu machen ſey.

Iſt das Gebürge, worinn gebauet werden ſoll, ſehr ſänftig, und wenig erhoben, wie die faſt wagerecht liegenden, oder ſogenannten Flötzgebürge ſind, ſo iſt es oft ſchwer, ſo viel Teuffe in der Nähe zu finden, wo man mit einem Stollen ankommen, und das Gebürge damit aufſchließen, folglich von den Wäſſern befreyen kann.

In dergleichen Gebürgen behilft man ſich im Anfange mit Such- und Tageröſchen, theils nur die Tagewaſſer, ſo bey Regen- und Thauwetter einfallen, bald abzuführen, ehe ſie ſich in mehrere Teuffe ſenken, theils auch Erz- und Minerallager, Gänge, nur in einiger Teuffe auf- und zu unterſuchen, zu ſehen, ob ſie weiter in die Teuffe ſetzen, und werth ſind, daß man Schächte darauf abſinke, und endlich bey ſich zeigenden Grundwäſſern Waſſerkünſte, wenn Aufſchlagewaſſer vorhanden, oder, weil man dieſe nicht allemal antrift, dieſe Wäſſer durch Menſchen oder Thiere vermittelſt ſogenannter Göpel, oder Treibekünſte aus der Teuffe ziehen und zu Tage aufbringen laſſe.

Es kömmt, ſonderlich in den ſänftigen Gebürgen, ſehr viel darauf an, wie die Richtung der Steinlagen nach der Teuffe gehet, die ich vor allen Dingen erforſchen muß, wenn die Frage iſt, wie dem Erz- oder Minerallager, Gange, am beſten, kürzeſten und doch in möglichſter Teuffe bey zu kommen ſey.

Die wagrechte Durchbrechung gedachter Lagen, wenn ſie weit in das Gebürge getrieben werden muß, verurſachet, ſowohl im rolligen, als feſten Gebürge, langweilige, beſchwerliche und koſtbare Bergförderniß und Arbeit, ſie erfordert öfters viel Holz, Bretterwerk und Zimmerung, der Wettermangel ſtellet ſich endlich ein, und iſt gleichwohl wegen der Waſſerloſung eines Gebürges die allernöthigſte.

Die flache Durchbrechung verurſachet beſchwerliche Förderniß, koſtet, wenn das hangende Geſtein nicht feſt genug iſt, viel Zimmerung oder Mauerung, und wird, wenn ſie gar zu flach iſt, im Ein- und Ausfahren zu beſchwerlich, vernützet auch viel Seil, Kübel, Holz und Bretterwerk.

Die ſenkrechte Durchbrechung wird dem Bergmanne im Ein- und Ausfahren beſchwerlich, bey der Arbeit in faſt ebenliegenden Steinlagen oder ſogenannten Flötzgeſteine ſauer, koſtet viel Zeit und Geld, der Wettermangel ſtellet ſich bald ein, die Berg- und Erzförderniß koſtet viel Seil, Kübel und Schmiere, wie auch noch über dieß im rolligen und klüftigen Geſteine viel Zimmerung oder Mauerung.

Die wagrechten Durchbrechungen nennet man Röſchen, Stollen, Strecken, Querſchläge, Flügelörter, Schieferfahrten; ſie werden auch ſöhlige Durchbrechungen genannt.

Die flachen donnlegigen Durchbrechungen heißet man flache, die ſenkrechten oder ſaigern aber ſaigere Schächte, Schürfe, Geſenke, Schlöthe oder Ueberſichbrechen.

eben so senken, ob ich gleich nicht läugnen will, daß es auch einige Ausnahme geben könne, die aber bey einiger Aufmerksamkeit bald zu entdecken seyn werden. Habe ich hingegen da, wo die Stein-Erz- oder Minerallagen zu Tage ausstreichen, einen Hügel, Berg vor mir, und diese Lagen fallen oder strecken sich gegen denselben in die Teuffe, so habe ich zu betrachten, ob der Hügel, Berg entweder auf der anderen Seite jähe und bald abfällt, oder ob er auf eine sehr lange Strecke ganz sänftig, flach lieget und seine Oberfläche sich mit der daranstossenden eines andern sänftigen Hügels, Berges vereiniget. In dem ersten Falle ist es rathsam, sich mit dem Baue auf der jähe abfallenden Seite einzulegen, und einen Stollen in das Hangende des Hügels, Berges anzusetzen, weil da die Erd- und Steinlagen mit ihren Erzen und Mineralien der StollenArbeit zufallen, und die Wässer, so aus den Klüften zugehen, desto leichter abgeführet werden können. In dem andern Falle ist es schwer, dem Erz- oder Minerallager im Hangenden beyzukommen, weil nur mit Schächten, aber nicht leicht mit Stollen anzukommen ist, indem vor selbigen kein Thal, und daher keine genugsame Teuffe in der Nähe erlangt werden kann; die Schächte aber, da die Steinlagen einstürzen, sind meistentheils sehr tief abzusinken, wobey bald matte Wetter und Wassersnoth dem Baue die gröste Hinderniß in den Weg legen, auch wohl gar das Niederbringen solcher Schächte bis auf das Erz- oder Minerallager unmöglich machen.

Es ereignet sich öfters, daß am Ausgegenden der Erd- und Steinlagen eines solchen Hügels, Berges, also in dessen liegenden ein Thal ist, wo allenfalls ein Stollen angesetzt werden kann, wenn die Steinlagen mit ihrem Erz- oder Minerallager jähe einstürzen, sonst ist der Weg mit einem Stollen oder Rösche durch das lie-

Lieget das Erz- oder Minerallager, als Vitriol-Kieß Farben-Erden, Porcelain-Erden, Eiſenſtein, Alaun-Erde oder Alaun-Schiefer, Steinkohlen, braune Holzkohlen, Torf, Marmor, und andere zum bauen dienliche Steine bald unter der Damerde, oder nicht allzutief darunter, ſo werden ſie, nachdem ſie weggenommen worden, gleich vom Tage hineingewonnen, oder man macht verſchiedene runde und nicht allzuweite Gruben neben einander nieder, flechtet ſie mit Knütel und Reißholze aus, wozu das junge Eichenholz das beſte iſt, und nimmt Erz, Mineral, Eiſenſtein ꝛc. um ſich herum, ſo lange es ohne Gefahr des Einſturzes des Gebürges geſchehen kann, mit Behutſamkeit hinweg. Liegen aber dieſe Dinge ſonderlich Erz- und Mineralien in ziemlicher Teuffe, ſo muß man beym Anfange des unterirdiſchen Bergbaues ganz anders zu Werke gehen, und ſowohl bey flachliegenden, als erhobenen Gebürgen und ihren in ſich habenden Erd- und Steinlagen auf Röſchen, Stollen, und tiefere Schächte bedacht ſeyn, die Erz- und Minerallager zu entdecken, und das gewonnene durch ſie an den Tag zu bringen.

Habe ich die Richtung der Steinlagen nach der Teuffe, ſowohl bey flachliegenden, als erhobenen durch ſchürffen und einſchlagen in die Damerde, oder in Waſſerriſſen, Schlüchten ꝛc. entdeckt, ſo kömmt auch endlich das durch Fluthen und Wind aufgeſetzte Tagegebürge in Betrachtung. In Gebürgen, deren Steinlagen unter der Erde flach liegen, kann man öfters ſchon aus ihrer Oberfläche dieſe Lage gewahr werden, und von dieſer auf jene ſchließen, als: Ich ſehe, die Oberfläche der aufgeſetzten Damerde des Gebürges ſenket ſich nach und nach gegen Mittag und Abend, ſo kann ich hieraus ſchließen, daß des Gebürges unterirdiſche Stein- Erz- und Minerallager in den allermeiſten Fällen ſich

eben

Gedanken, Schächte auf selbige abzusenken, fahren lassen muß, auch nächst diesem die Ausfuhr der Erze sehr mühsam und gefährlich für den Fuhrmann und sein Geschirre ist.

Dieses bisher angeführte vorausgesetzt wende ich mich nunmehr zu den oben erwähnten Gegenständen des unterirdischen Baues bey Bergwerken.

Von dem unterirdischen Bergbaue in fast wagerecht, oder schwebend liegenden Erd- und Steinlagen.

In Gebürgen, deren Erd- und Steinlagen fast wagerecht, oder schwebend, liegen, trift man Erz- und Mineral sowohl in und zwischen diesen ihren Lagen, als auch in Gängen an, welche letztern durch die schwebenden Lagen senkrecht oder auch flach durchsetzen. Bey den schwebenden Steinlagen wird der unterirdische Bau wegen ihrer Lage etwas anders als an den Gängen geführet, so die schwebend liegenden Lagen durchschneiden.

Ich will den Bau zwischen den schwebend liegenden Lagen zuerst vornehmen, und hernach von den diese Lagen durchschneidenden Gängen einen Begriff zu machen suchen; den Bau auf diesen aber im folgenden Abschnitte zugleich mit angeben.

Da die Gebürge und ihre Erd- und Steinlagen, woraus sie bestehen, sie mögen schwebend oder erhoben liegen, sich jederzeit nach zwoen Gegenden vom Horizonte erheben und nach zwoen über liegenden sich neigen; so muß man gleich zu Anfange ihres

unterirdiſchen Baues ſich dieſe Beſchaffenheit zu Nutze machen, und wegen Abführung der Waſſer, welche ſonderlich in den Gebürgen ſchwebend liegender Lagen reichlich vorhanden ſind, das Gebürge und ſeine Lagen da angreifen, wo ſie ſich hinneigen, das iſt, man muß ſich in ihr Hangendes mit der Bergarbeit legen, und daſelbſt, wenn ein Thal vorhanden, mit einem Stollen oder wagerechter Durchbrechung den Anfang machen, von daraus aber die ganze Bergarbeit gegen das Liegende, oder nach der Gegend treiben, wohin ſich das Gebürge mit ſeinen Erd- und Steinlagen hebet, ſo fallen die Waſſerköſten, welche ſonſt bey dem Bergbaue eine der beträchtlichſten Ausgaben machen, hinweg; denn man kann ſein Erzminerallager ſo zu ſagen Staffelweiſe ohne Hinderniß abbauen, und die Waſſer hinter ſich weglaufen laſſen.

Die Durchbrechungen der Erd- und Steinlagen müſſen auf die kürzeſte, bequemſte und vortheilhafteſte Weiſe vorgenommen werden; man muß ſich daher allemal, ſo viel wegen Abführung der Wäſſer möglich iſt, den kürzeſten Weg nach dem Erz- oder Minerallager des Gebürges wählen, ſie mögen zwiſchen den ſchwebenden Steinlagen, oder als ganze Stöcke im Gebürge liegen. Der allerkürzeſte Weg aber gehet nach einer geraden Linie, und iſt bey einerley Geſteine der wohlfeileſte bey der Arbeit. Dieſe Linie muß man alſo, ſo viel nur immer möglich iſt, bey allen Durchbrechungen des Gebürges oder deſſen Geſteins, ſie mögen wagerecht, flach, oder ſenkrecht geſchehen, vor Augen haben; bey Bergwerken beſtimmt die Markſcheidekunſt dieſe gerade Linie; die Durchbrechung harter Steinlagen und Felſen iſt eine ohnehin ſehr koſtbare Arbeit, man muß ſie durch krumme Wege nicht noch koſtbarer machen.

Bey vielen Bergwerken scheuet man sich zwar nicht, bey fast jedem vorfallenden festen Gesteine auszuweichen, und die Arbeit in Gebrecheres zu treiben, unter dem Vorwande, Zeit und Kosten zu ersparen. Der Vorwand aber tauget nichts; man kömmt weder wohlfeiler noch hurtiger davon; denn die Zimmerung oder Mauerung, so bey dergleichen gebrechern Gebürge hernach zum öftern nöthig ist, vereitelt beyde Absichten, und man behält über kurz oder lang ein baufälliges Berggebäude. Ich behaupte im Gegentheil, daß es Fälle giebt, wo man gezwungen ist, sich aus dem gebrechen Gesteine in ein festes zu wenden, wenn das Gebäude dauerhaft seyn soll, wo hernach weder Zimmerung und Mauerung nöthig ist, noch Brüche entstehen können.

Der andere Fall, wo von der wagerechten und senkrechten geraden Linie währender Arbeit abgewichen werden kann, ist, wenn an einem edeln Erz- oder Minerallager, das nicht immer in einer geraden Linie fortstreicht, oder sich in die Teuffe senkt, entweder mit einem Stollen, oder Streckenorte aufgefahren, oder Schächte, Gesenke darauf abgesunken werden; denn da ist die Gewinnung des Erzes und Minerals das Hauptwerk, und der Bergmann gehet ihm nach, es mag streichen, oder sich senken, wie und wohin es will; man scheue keine tauben Mittel; denn es ist nicht leicht ein Erzminerallager durchgängig edel, sondern sie werden bisweilen von dem Gesteine auf verschiedene Weise verdrückt, durch andere Steinwände verschoben, abgeschnitten, sie richten sich aber auch wieder ein, und beweisen sich hernach eben so edel, wie zuvor, ob es gleich auch bisweilen Fälle giebt, daß sie von andern zufallenden Gesteine ganz und gar abgeschnitten oder verdrückt werden, und sich bey Verfolg der Arbeit nicht wieder zeigen.

unterirdiſchen Baues ſich dieſe Beſchaffenheit zu Nutze machen, und wegen Abführung der Waſſer, welche ſonderlich in den Gebürgen ſchwebend liegender Lagen reichlich vorhanden ſind, das Gebürge und ſeine Lagen da angreifen, wo ſie ſich hinneigen, das iſt, man muß ſich in ihr Hangendes mit der Bergarbeit legen, und daſelbſt, wenn ein Thal vorhanden, mit einem Stollen oder wagerechter Durchbrechung den Anfang machen, von daraus aber die ganze Bergarbeit gegen das Liegende, oder nach der Gegend treiben, wohin ſich das Gebürge mit ſeinen Erd- und Steinlagen hebet, ſo fallen die Waſſerköſten, welche ſonſt bey dem Bergbaue eine der beträchtlichſten Ausgaben machen, hinweg; denn man kann ſein Erzminerallager ſo zu ſagen Staffelweiſe ohne Hinderniß abbauen, und die Waſſer hinter ſich weglaufen laſſen.

Die Durchbrechungen der Erd- und Steinlagen müſſen auf die kürzeſte, bequemſte und vortheilhafteſte Weiſe vorgenommen werden; man muß ſich daher allemal, ſo viel wegen Abführung der Wäſſer möglich iſt, den kürzeſten Weg nach dem Erz- oder Minerallager des Gebürges wählen, ſie mögen zwiſchen den ſchwebenden Steinlagen, oder als ganze Stöcke im Gebürge liegen. Der allerkürzeſte Weg aber gehet nach einer geraden Linie, und iſt bey einerley Geſteine der wohlfeileſte bey der Arbeit. Dieſe Linie muß man alſo, ſo viel nur immer möglich iſt, bey allen Durchbrechungen des Gebürges oder deſſen Geſteins, ſie mögen wagerecht, flach, oder ſenkrecht geſchehen, vor Augen haben; bey Bergwerken beſtimmt die Markſcheidekunſt dieſe gerade Linie; die Durchbrechung harter Steinlagen und Felſen iſt eine ohnehin ſehr koſtbare Arbeit, man muß ſie durch krumme Wege nicht noch koſtbarer machen.

Bey vielen Bergwerken scheuet man sich zwar nicht, bey fast jedem vorfallenden festen Gesteine auszuweichen, und die Arbeit in Gebrecheres zu treiben, unter dem Vorwande, Zeit und Kosten zu ersparen. Der Vorwand aber tauget nichts; man kömmt weder wohlfeiler noch hurtiger davon; denn die Zimmerung oder Mauerung, so bey dergleichen gebrechern Gebürge hernach zum öftern nöthig ist, vereitelt beyde Absichten, und man behält über kurz oder lang ein baufälliges Berggebäude. Ich behaupte im Gegentheil, daß es Fälle giebt, wo man gezwungen ist, sich aus dem gebrechen Gesteine in ein festes zu wenden, wenn das Gebäude dauerhaft seyn soll, wo hernach weder Zimmerung und Mauerung nöthig ist, noch Brüche entstehen können.

Der andere Fall, wo von der wagerechten und senkrechten geraden Linie währender Arbeit abgewichen werden kann, ist, wenn an einem edeln Erz- oder Minerallager, das nicht immer in einer geraden Linie fortstreicht, oder sich in die Teuffe senkt, entweder mit einem Stollen, oder Streckenorte aufgefahren, oder Schächte, Gesenke darauf abgesunken werden; denn da ist die Gewinnung des Erzes und Minerals das Hauptwerk, und der Bergmann gehet ihm nach, es mag streichen, oder sich senken, wie und wohin es will; man scheue keine tauben Mittel; denn es ist nicht leicht ein Erzminerallager durchgängig edel, sondern sie werden bisweilen von dem Gesteine auf verschiedene Weise verdrückt, durch andere Steinwände verschoben, abgeschnitten, sie richten sich aber auch wieder ein, und beweisen sich hernach eben so edel, wie zuvor, ob es gleich auch bisweilen Fälle giebt, daß sie von andern zufallenden Gesteine ganz und gar abgeschnitten oder verdrückt werden, und sich bey Verfolg der Arbeit nicht wieder zeigen.

Die Bequemlichkeit der Arbeiter, die Förderung der Berge Erze, Mineralien und die mögliche Erſparung der Köſten erfordern, daß die Durchbrechungen der Erd- und Steinlagen in gehöriger Höhe und Weite geſchehen. Daher haben ſie ihr Maaß; dieſes richtet ſich noch überdieß nach gewiſſen Abſichten, die man bey dieſem oder jenem anzuſtellenden unterirdiſchen Bergbaue hat.

Einer kurzen Tageröſche, wodurch nur die Tage- oder einfallenden obern Thau- und Regenwäſſer abgeleitet, der Arbeit bey abzuſinkenden Schürffen und Schächten Wetter oder friſcher Luftzug eingebracht, und das Erzminerallager aufgeſucht werden ſoll, giebt man 5 bis 6 Fuß Höhe und 2 Fuß Weite, auch wohl etwas mehr; iſt ſie aber hundert und mehr Lachter zu treiben, ſo muß ſie einzuführender friſcher Wetter wegen höher werden, ſie wird alsdenn einen Stollen im Maaße ähnlicher.

Ein Stollen der mit der Zeit mehr als ein unterirdiſches Bergwerksgebäude löſen, ihre Wäſſer einnehmen und abführen ſoll, muß ordentlicher Weiſe 7 bis 8 Fuß hoch und bis 3 Fuß weit ſeyn; ſoll er aber die Wäſſer eines ganzen Zuges von Gebürgen und Zechen löſen, ſo muß er noch höher und weiter zu hauen angefangen werden.

Auf ſchwebend liegenden Erz- und Minerallagern, Kupfer- Alaun- Schiefern richtet man ſogenannte Fahrten vor, welche Art der Durchbrechung vielmal kaum 18 bis 20 Zoll hoch, und 4 Fuß weit fort gehauen, und die Erze, Mineralien, edle Schiefer mühſam weggenommen und zu Tage aufgebracht werden. Sind die Erz- und Minerallager höher und mächtiger, ſo treibt man Strecken neben- und durcheinander, daß alle 1 oder 2 Lachter ein Pfei-

ler oder sogenannte Bergfeste von 1 oder 2 Quadratlachtern stehen bleibet und das Tach unterstützet, daß es nicht einstürze; bey der Schieferarbeit wird das Tach, wo die Schiefer weggehauen werden, mit tauben Schieferwänden, die keinen Gehalt haben, unterschlagen. Wo aber vor dem sogenannten Strebe, oder ganzen Schiefergesteine, gearbeitet wird, und das Tach nicht allzu gut ist, setzen die Schieferhäuer kleine hölzerne Bolzen zu ihrer Sicherheit unter. Bey der Schieferarbeit wird insgemein eine Fahrt immer in gerader Linie, bequemer Förderung wegen, in das Feld fortgehauen, und neben dieser zur beyden Seiten andere Fahrten meist nach einer schrägen Linie angesetzt, und mit der ersten dergestalt fortgetrieben, damit man beständig ein fein breites auszuhendes Strebe vor sich habe, wie die I. Fig. anzeiget, in welcher *a.* die gerade fortgetriebene, und *b.* die Nebenfahrten, *c* aber das Strebe, oder noch nicht durchbrochene Schiefergestein ist.

Einen Schacht, der auf ein Erz- oder Minerallager abgesunken und nicht tiefer, als etliche 20 bis 30 Lachter nieder gebracht wird, macht man in der Länge 8 — 9. und in der Breite 3 Fuß, wenn zugleich ein Fahrschacht dabey seyn soll; sonst muß er je tiefer, je länger werden, damit der Rundbaum auch länger werde, und zur Aufwickelung des Schachtseils Platz genug darauf sey.

Wenn die schwebend aufeinander liegenden Erd- und Steinlagen flach, oder senkrecht nach der Teuffe zu von einander gerissen, und dieser Riß mit Quarten, Spath und Erz, oder mit sonst einer Gangart und Mineral ausgefüllet ist, so heißet dieser Riß ein Gang; sind aber auf der einen Seite die von einander gerissenen oder geborstenen Erd- und Steinlagen gesunken und auf der andern Seite stehen geblieben, so, daß nunmehr nicht Damerde

gegen,

gegen Damerde, Sand gegen Sand, Kalkſtein gegen Kalkſtein, Zechſtein gegen Zechſtein, und Schiefer gegen Schiefer über liegen, ſondern Damerde gegen Sand, dieſer gegen Kalkſtein, dieſer gegen Zechſtein und ſo fort, oder wohl gar Damerde dem Kalkſteine und Sand dem Zechſteine gegen über liegen, ſo heißen dieſe Riße oder Gänge, Wechſelrücken, weil da, bey dem Niederſinken, die Erd- und Steinlagen nicht einander gerade über ſtehen geblieben, ſondern gewechſelt haben; nach dem bergmänniſchen Sprachgebrauche ſagt man, das Flötz ſey auf der einen Seite in die Höhe, und auf der andern Seite in die Teuffe geſprungen, daher jenes das obere Flötz, dieſes das untere genannt wird; das Wort Flötz aber deutet bey manchen Bergwerken entweder alle über einander ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen, oder auch wohl nur eine an, welche vorzüglich vor den andern das Flötz genannt wird.

Dieſe angegebenen Durchbrechungen geſchehen auf die vortheilhafteſte Weiſe, wenn ſie von geſchickten Auffehern veranſtaltet, und eben dergleichen Bergleuten mit tüchtigen Gehähe und Werkzeugen ordentlich verrichtet werden.

Von dem unterirdiſchen Bergbaue in erhobenen Erd- und Steinlagen.

Der Anfang des Baues wird in erhobenen Erd- und Steinlagen eben ſo, wie in den faſt wagerecht oder ſchwebend liegenden mit Röſchen, Stollen oder Schächten und Schürfen gemacht. Weil aber in den erhobenen Erd- und Steinlagen die Erze und Mineralien nicht wagerecht, ſchwebend oder zu breitem Blicke, wie der Bergmann ſpricht, liegen, ſondern Gangweiſe

bre-

brechen, das ist, so zwischen dem Gesteine enthalten sind, daß sie entweder in flachen, oder senkrechten durch das Gestein geschehenen Rissen liegen, so geschiehet die Durchbrechung der Gänge in diesen erhobenen Steinlagen etwas anders, als die Durchbrechung der Erz- und Minerallager in schwebenden Erd- und Steinlagen. Es wird nämlich, wenn der Gang in einem tiefen Thale zu Tage ausstreichet, am selbigen entweder gleich mit einem Stollen aufgefahren, oder man ist aus Mangel eines solchen Thales gezwungen, den Stollen auf einer andern Seite des Gebürges, wo genugsame Teuffe und gute Gelegenheit vorhanden, anzusetzen; wo aber auch dieses fehlet, werden auf der Oberfläche des Gebürges Schächte gleich auf dem Gange entweder senkrecht oder flach, nachdem die Lage oder Richtung des Ganges in die Teuffe beschaffen ist, abgesunken, oder dieselbe werden dem Gange zur Seite gesetzt; dieses kann sowohl im Hangenden als Liegenden des Ganges geschehen. Ist das Hangende feste und gut, so setzt man den Schacht in dasselbe in einer solchen Entfernung vom Gange, daß man mit saigerer Absinkung desselben in einer gewissen Teuffe auf ihn treffe; vermuthet man aber, das hangende Gestein möchte zu klüftig seyn, und viel Zimmerung oder Mauerung erfordern, so wird der Schacht im Liegenden senkrecht nieder getrieben, und der Gang in der Teuffe mit einem Querschlage, nach dem Hangenden zu, aufgesucht.

Ich will eine Durchbrechungsart nach der andern vornehmen. Kann man an einem in einem tiefen Thale ausgehenden Gange, welches aber ein seltener Fall ist, gleich Röschen- oder Stollenweise auffahren, so wird an Zeit und Kosten viel gewonnen; denn hier läßt sich gleich ein vortheilhafter Bau, bald Erz zu gewinnen, vorrichten. Man kann, so bald der Gang sich edel zu erweisen anfänget, entweder übersich brechen, sodann Firstenarbeit anlegen, und

das im Gange befindliche, meiſt mit Bergen, Spath, Quarz vermiſchte Erz Stroſſenweiſe überſich weghauen, oder mit Sprengen gewinnen, die Erze von den Bergen aushalten, die Berge aber auch auf die unter ſich zuſchlagenden Käſten ſtürzen, und, die daſelbſt nicht Platz genug haben, mit den Erzen zu Tage ausfördern; oder man bricht überſich, länget ins Feld aus, hauet die Erze und Berge Stroſſenweiſe mit der Stollenſohle fort, ſchlägt Käſten hinter ſich zurück in gewiſſen Höhen über einander, bringt die Berge darauf, und benimmt dadurch dem ausgehauenen Gebäude die Gelegenheit einzuſtürzen; ſolchergeſtalt fährt man immer ſo lange mit dem Baue am Gange fort, als dieſer das Feld einnimmt und edel iſt.

Setzet der Gang mit Erzen unter den Stollen nieder, ſo wird aus dieſen in etwas auf die Seite, und eine ſogenannte Hornſtadt gebrochen, den Haſpel dahin zuſtellen, alsdann abgeteufft, bey dem Abteuffen aber der Bau wegen Zugänge der Wäſſer, ſo entweder mit Handpumpen oder andern Waſſerkünſten müſſen gewältiget werden, ſchwerköſtiger; wird aber, wenn man ſo tief abgeſunken, als man gekönnt, in der Teuffe eben ſo, wie über dem Stollen, wenn auf der Sohle des Geſenkes wieder an den Gang gebrochen wird, ins Feld, durch Auffahren oder Auslängen ins Feld, wie auch vorrichten der Firſten- oder Stroſſenarbeit fortgeführet, doch ſo, daß zwiſchen dieſem Gebäude und der Stollenſohle ein ſtarkes Mittel vom Gange ſtehen bleibe, auf welchen die Stollen Wäſſer zu Tage auslaufen mögen; wollte man aber zuletzt auch dieſes Mittel, wenn es edel iſt, wegnehmen, ſo müßten zu Abführung der Stollen Wäſſer Schräme ins Liegende des Ganges zuvor gehauen werden.

Iſt kein Thal vorhanden, wo man gleich auf dem Gange mit einem Stollen anſitzen kann, ſo wird andere Gelegenheit geſucht, wo am tiefeſten mit einem Stollen anzukommen ſeyn möchte, einen oder mehrere Gänge damit zu überfahren und aufzuſuchen.

Streichen die Gänge gleichlaufend oder meiſtentheils in einerley Richtung neben einander durch das Gebürge, ſo wird der Stollen vornehmlich ins Hangende, oder wenn da nicht, ſondern beſſer im Liegenden anzukommen iſt, in das Liegende getrieben, und hernach, wenn an den überfahrnen Gängen zu beyden Seiten des Stollens ausgelänget worden, wie ich bereits erwähnet habe, an jedem Gange gehörig abgebauet; halten die Gänge in einem Gebürge nicht einerley Streichen, ſondern fallen durch einander her, ſo gilt es gleich, wo und auf welcher Seite man den Stollen anſetzen will; es iſt nicht genug, wenn es in möglichſter Teuffe geſchiehet, und dabey, wo möglich, der kürzeſte Weg gewählet wird; in dieſem Falle geſchiehet der Bau vom Stollen aus, wie in dem vorigen.

Wollte man aus verſchiedenen durch einander herſetzenden Gängen ſich den vermuthlich edelſten zu bauen erwählen, ſo iſt natürlich, daß man dieſem mit dem anzuſetzenden Stollen auf dem kürzeſten Wege und in möglichſter Teuffe beyzukommen ſuchen müſſe.

Wenn die Stollen weit in das Feld zu treiben ſind, ehe ſie auf die Gänge treffen, ſo iſt es vielmal wegen kürzerer Förderniß, und zu verſchaffender friſchen Wetter nöthig, unterweges Schächte auf die Stollen abzuſinken, ſo bey Bergwerken Lichtlöcher genannt werden.

Kann man, ſonderlich in ſehr ſänftigen Gebürgen, nirgends mit einem Stollen ankommen, ſo werden Schächte, wenn Hangendes und Liegendes gut, gleich auf dem Gange abgeſunken, oder ſie werden in deſſen Hangendes oder Liegendes geſetzt.

Feſte Schächte zubekommen, die keinen ſo öftern Brüchen unterworfen ſind, erwählet man lieber das Liegende, und bricht hernach von der Sohle des Schachtes mit einem Querſchlage ſeitswärts an den Gang, anſtatt, daß, wenn der Schacht in das Hangende geſetzt wird, er endlich in der Teuffe auf den Gang ſelbſt treffen muß.

Werden die Schächte auf den Gängen ſelbſt abgeſunken, ſo geſchiehet es nach dem Fallen derſelben in die Teuffe, das iſt, entweder ſenkrecht oder flach, ſonſt aber allemal ſenkrecht, weil dieſes der kürzeſte Weg iſt, in die Teuffe zukommen; bey dieſer Bauart müſſen die Wäſſer gemeiniglich mit Waſſerkünſten gehalten werden; der Bau ſelbſt aber wird an den edeln Gängen eben ſo, wie ſchon gemeldet, geführet.

An den Gängen ſelbſt, woran gebauet werden ſoll, wird, ſo viel möglich zu beyden Seiten ausgelänget, und die Arbeit in des Ganges Feld Strecken- Firſten- oder Stroſſenweiſe fortgebracht; das erſtere geſchiehet durch Anſetzung und Fortreibung der Oerter, das zweyte durch ſtaffelweiſe Forthauung der Firſten, das dritte durch Anlegung und Nachreißung der Stroſſen.

Zu einer Ortshöhe werden insgemein 5 Fuß, und zur Breite 2 Fuß genommen, wenn der Gang ſchmal iſt; iſt er mächtig und ſein Gebürge feſte und gut; ſo werden die Erze und dazwi-

zwiſchen liegenden Berge breiter und höher weggenommen, auch, wie ich oben bereits gemeldet, Stroſſen angelegt und nachgeriſſen, mit den Bergen aber das Hangende, an welchem mit dieſer Durchbrechung der Anfang zu machen iſt, unterbauet, damit es in Ruhe komme, und keine ſich mit der Zeit losziehenden Wände hereinfallen, oder das Gebürge einen Bruch machen könne. Alſo treibet man an ſehr mächtigen Gängen eine Strecke neben der andern gegen das Hangende auf einige Lachter, auch wohl, wenn es nöthig iſt, mit darzwiſchen ſtehen gelaſſenen Bergfeſten, dem Streichen des Ganges nach, in das Feld fort, ſo lange noch Erz am Gange vorhanden, oder hinter vorfallenden tauben Mitteln wieder zu vermuthen iſt, indem immer die ausgehauenen Strecken ſeitwärts mit den Bergen der neu angefangenen verſetzt werden, und durch die neue die Förderung geſchiehet.

Querſchläge, wenn ſie nicht weit zu treiben ſind, bekommen nur die Höhe und Weite der ordentlichen Strecken. Sie haben in ſolchen unterirdiſchen Bergwerksgebäuden ſtatt, wo mehr als ein Gang neben dem andern liegt, ſonderlich in den Gebürgen der faſt wagerecht, oder ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen, da man ſie auch Wechſel zu nennen pfleget; dieſe Querſchläge werden rechtwinklicht aus dem einen Gange gegen den andern angeſetzt, und wenn ſie weit zu treiben ſind, müſſen ſie höher ausgehauen werden.

Flügelörter weichen nur darinne von den Querſchlägen ab, daß ſie entweder aus einem Stollen nach einem ſeitwärts liegenden andern edeln Gebürge, oder Waſſer nöthigen Zeche ꝛc. meiſt nach einer ſchrägen Linie mit Beybehaltung der Stollen-Höhe und Weite, oder aus den Gängen an den von ihnen ab und in das Gebürge ſetzenden ſtarken edeln Trümmern, oder auch der

Wetter- und Waſſerloſung wegen nach andern unterirdiſchen in der Nähe liegenden Bergwerksgebäuden getrieben werden, da ihnen denn die Streckenhöhe gegeben wird.

Alle ſowohl wagerechte, als ſtache und ſenkrechte Durchbrechungen bey einem unterirdiſchen Bergbaue müſſen überhaupt wegen Bequemlichkeit des Ein- und Ausfahrens der Bergleute, der Förderniß der Erze und Berge, Bringung guter Wetter in das Gebäude und Abführung der Wäſſer eine geſchickte Verbindung und Lage mit- und gegeneinander bekommen, damit allzeit der vorgeſetzte Zweck auf dem kürzeſten und bequemſten Wege durch die Oeffnung dieſer Durchbrechungen erhalten, und vermittelſt derſelben die Bergleute und Arbeiter bey aller vorfallenden Bergarbeit vortheilhaft und mit Nutzen angebracht werden können, das iſt, es muß aus einer Durchbrechung in die andere in dem ganzen Berggebäude bequem zu kommen ſeyn, und Förderung geſchehen können.

Die Röſchen, Stollen und Waſſerſtrecken müſſen ihre Lage gegen andere Strecken, Querſchläge, Flügelörter, Schächte, Geſenke, Ueberſichbrechen alſo bekommen und haben, daß ſie ihnen gute Wetter bringen und Waſſer benehmen mögen. Es müſſen daher die Sohlen der Röſchen, Stollen, Waſſerſtrecken nicht tod gehauen, das iſt, im Gebürge nicht tiefer, als an ihrem Anfange und erſter Oeffnung, ſondern faſt wagerecht mit $1\frac{1}{2}$ höchſtens 2 Zoll Fall auf 100. Lachter lang fort gehauen werden, damit die Wäſſer nicht vor Ort, ſondern vielmehr zu Tage auslaufen, und wenn durch eine Röſche, Stollen, Waſſerſtrecke zugleich gefördert werden ſoll, muß man in den erſten beyden zum Ablauf der Wäſſer Trägwerke, ſo in folgender Abtheilung vorkommen werden, ſchlagen, und in den letztern ſeitwärts Schräme auf der Sohle in

dem

dem Liegenden des Ganges 6. 8. 12. und mehr Zoll tief nach der abzuführenden Menge der Wässer aushauen lassen.

Wie das feste oder gebrechе Gestein zu durchbrechen, den Hauern verdinget, und von ihnen durchbrochen wird, wie die Erze gewonnen, zersetzt und die Berge ausgehalten werden sollen, gehöret zu meinem jetzigen Zwecke nicht; es können aber hierüber die alten Bergbücher nachgeschlagen werden.

Ich sollte hier noch den unterirdischen Bau in ganzen Stockwerken von Erz abhandeln. Rößler aber, der ehemals bey dem grossen Zwitterstocke zu Altenberg, unweit Dreßden, in Diensten gestanden, hat in seinem Bergbauspiegel diesen unterirdischen Bau hinlänglich beschrieben, so, daß man sich aus seiner Nachricht und aus dem beygefügten Kupferstiche einen ziemlich deutlichen Begrif von diesem Baue machen kann, wenn man sich dabey vorstellet, daß dergleichen Durchbrechungen, wie der Kupferstich zeiget, mehr unter, über- und nebeneinander gemacht werden können, dergleichen ich in gedachtem altenburgischen Zwitterstocke, der Zeichnung gemäß, selbst wahrgenommen. Nur würde ich, wenn ich hier noch etwas beyfügen sollte, zu Anlegung eines solchen unterirdischen Baues auf einem mächtigen Stockwerke, einen geschickten Markscheider, fürsichtigen Baumeister, verständigen Bergmeister und wachsamen Steiger zu gebrauchen eifrigst empfehlen.

Hier ist noch überhaupt zu erinnern, daß eine genaue und ordentliche Hauerarbeit in einem unterirdischen Berggebäude viel Vortheil und Bequemlichkeit verschaffen könne, weswegen jederzeit ein scharfes Aug auf selbige zu haben, niemals vergeblich seyn dürfte; denn in reinlich und wohl ausgehauenen Durchbrechun-

chungen, iſt allerdings beym Ein- und Ausfahren ſowohl, als bey der Förderung der Erze und Berge beſſer fortzukommen, als wo hie und da noch die Felſenſtücke hervorragen und über kurz oder lang durch ihr Hereinfallen Brüche verurſachen.

Von der Feſtigkeit und Dauer der unterirdiſchen Berggebäude in faſt wagerecht oder ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen.

Das Bauen unter der Erde iſt eine Beſchäftigung für die Bergleute. Wo ſie ſich aber beſchäftigen ſollen, da müſſen ſie genugſame Sicherheit vor dem Einſturz der Felſen und für ihr Leben haben. Die Feſtigkeit und Dauer ihrer unterirdiſchen Gebäude gewähret ihnen beydes. Es iſt ihnen alſo nöthig zu wiſſen, wie einem unterirdiſchen Berggebäude in klüftigen und mürben Geſteine Feſtigkeit und Dauer gegeben werden, und wie es beſchaffen ſeyn muſſe, wenn es feſt und dauerhaft heißen ſoll. Denn feſtes Geſtein ohne Klüfte ſtehet vor ſich ſelbſt. Ein Gebäude iſt feſt, wenn die Laſt ſeiner Theile oder ſein ganzer Körper gehörig unterſtützt iſt; das aber, was eine Laſt unterſtützen ſoll, muß nicht ſchwächer, als der Druck der Laſt ſeyn; es muß alſo die Stärke der Unterſtützung zu der Schwere, oder dem Drucke der Laſt die gehörige Verhältniß haben. Zur Erläuterung dieſes ſtelle man ſich einen Körper vor, der, wenn er mit ſeiner ganzen Schwere ſenkrecht auf einem wagerechten Grunde ſtehet, ruhet; entfernet ſich aber deſſen Mittelpunct der Schwere, durch eine bewegende Kraft, als durch einen Zug, Druck, an ſeinem obern Theile, indem er dadurch auf die Seite geneiget wird, ſo drückt ſeine ganze Schwere nicht mehr auf den ganzen Grund, ſondern nur auf einen Theil deſſelben. So lange dieſes geſchichet, wird er nicht außer ſeinen Grund fallen, ſondern wenn die Directionslinie des

Mittel-

Mittelpunets ſeiner Schwere auch nur noch in dem letzten Puncte der Grundfläche, auf welcher er vorher ruhete, ſenkrecht auftrift, im Gleichgewichte ſtehen bleiben. Fällt aber die ſenkrechte Directionslinie des Mittelpuncts ſeiner Schwere vollends außerhalb ſeinen Grund, ſo muß der Körper fallen; denn ſoviel ſeine Schwere bey ſeiner Neigung auf die Seite innerhalb ſeinem bisherigen Grunde abnimmt, ſo viel nimmt ſie außerhalb demſelben zu. Je nachdem nun die Schwere des ſich auf die Seite neigenden Körpers zunimmt, muß auch die Kraft, ſo die außer ſeinem vorigen Grunde zunehmende Schwere unterſtützen ſoll, zu nehmen und vermehret werden. Es wird alſo aus den Graden des Neigungswinkels, den ein freyſtehender Körper mit der verlängerten wagerechten Linie ſeines vorhergehenden Grundes machet, und aus der zunehmenden Schwere des Körpers außer ſeinem vorigen Grunde, die Größe oder die Stärke der Kraft, ſo ihn unterſtützen ſoll, beſtimmet werden können. Im Anfange der Neigung des Körpers, und der Entfernung des Mittelpunctes ſeiner Schwere von ſeinem vorigen Grunde wird ihn eine geringe Kraft unterſtützen, weil immer noch ein Theil ſeiner Schwere über ſeinem vorigen Grunde ſchwebet, und einen gleichen Theil derſelben, ſo ſich ſchon außer den Grund geneiget, im Gleichgewicht erhält. Je mehr aber der Körper, und alſo auch ſein Schwerpunct ſich außer ſeinen Grund neiget, je mehr fällt auch vom noch über dem vorigen Grunde befindlichen Theile der Schwere, der Helfte der ganzen Schwere ſo ſich ſchon außerhalb dem vorigen Grund befindet, zu. Da nun die Schwere außerhalb dem Grunde dadurch vermehret wird, ſo muß auch die Stärke der Kraft zur Unterſtützung zunehmen.

Geſetzt, ein Körper ſey 100. tt. ſchwer, er liege überall auf ſeinem Grunde, der ihn unterſtützt, auf, ſo wird er unter einem Winkel von 90. Graden, das iſt, ſenkrecht ſeinen Grund drücken; man fange

an, ihn ſeitwärts außer ſeinen Grund, worauf er ſtehet, zu bewegen, daß er mit der verlängerten Fläche dieſes Grundes einen ſchiefen Winkel von 80. Graden mache, ſo wird er nicht mehr mit ſeiner ganzen Schwere auf ſeinem vorigen Grunde drücken, ſondern es wird ſich etwas davon außer denſelben neigen; geſetzt, es wären 20. tt. je weiter der Körper auf dieſe Seite geneiget wird, je kleiner wird dieſer Winkel, und je mehr Schwere des Körpers neiget ſich mit auf die Seite; geſetzt, er mache nunmehr mit der verlängerten wagerechten Fläche ſeines vorigen Grundes einen Winkel von 45. Graden, ſo würde er vielleicht mit 50. tt. auf die Seite drücken. Im erſten Falle wird er keiner Unterſtützung bedürfen, weil ihn ſchon ſein ganzer Grund unterſtützt, worauf er ſtehet oder lieget. Im zweyten Falle muß ihn bereits eine Kraft unterſtützen, die 20. tt. Schwere tragen kann. Im dritten Falle muß ihn eine Kraft unterſtützen, die 50. tt. zu tragen vermögend iſt. Man ſiehet alſo hieraus, daß die Kraft zur Unterſtützung der 20. tt. ſchwächer ſeyn kann, als die, ſo 50. tt. unterſtützen ſoll, und daß, je kleiner der Neigungswinkel auf die Seite werde, je ſtärker die Kraft ſeyn müſſe, die den Körper unterſtützen ſoll, wie auch, daß, wenn der Körper endlich ganz auf die Seite wieder in eine wagerechte Linie zu liegen kömmt, die Kraft auch wieder ſo ſtark ſeyn müſſe, daß ſie 100. tt. die ganze Schwere des Körpers, wie ſein voriger Grund, unterſtützen könne. Weil nicht alle Bergofficianten eben Mathematikverſtändige ſind, ſo wird man mir verzeihen, daß ich dieſe Sache in der Art vorgetragen, wie ſie hier vor Augen iſt.

Könnten wir allemal die Dicke, Höhe und Schwere der gegen den Horizont geneigten und ſich von ihrem Ganzen durch ſogenannte Schlechten oder Klüfte abgelöſeten Steinwände und Felſenſtücken, in ſo ferne ſie ſelbſt keine Schlechten oder Klüfte haben, wiſſen, ſo könnten wir auch den Mittelpunct ihrer Schwere

entde-

entdecken, und mit Anhaltung eines Senkbleyes deſſen Directionslinie erforſchen, auch gewahr werden, ob dieſe Linie außer oder innerhalb den Grund des Felſenſtückes, worauf es ſtehet, falle, ob daſſelbe ruhe, oder den Fall drohe, und wie ſtark im letztern Falle die Unterſtützung deſſelben ſeyn müſſe. Da wir aber nicht durch die Steinwände und Felſen ſehen, und ihre ganze Beſchaffenheit allemal weder wiſſen, noch zu entdecken vermögen, ſo können wir auch nicht jederzeit, ihre Ruhe oder Fall beurtheilen, und gegen den letztern die Stärke der Unterſtützung beſtimmen, ob es gleich bey denen, die bereits in die Quere durchbrochen ſind, angehet, wo ich dieſe Art der Erforſchung allemal anrathe, weil ſie zur Sicherheit der Bergarbeiter und zu Erſparung vielmals unnöthiger Verzimmerung oder Mauerung und anderer unterſtützender Befeſtigung des Geſteines ungemein viel beytragen kann. Wo die Bergleute es einer Steinwand, oder einem Felſenſtück nicht ſogleich anſehen können, ob es ſtehen bleiben, oder fallen werde, da beklopfen ſie es mit ihren eiſernen Schlägeln oder Fäuſteln. Klingt der Schlag helle, ſo hängt das Felſenſtück mit ſeinem Ganzen noch feſt zuſammen; klingt er hohl und taub, ſo ſorgen ſie vor deſſen Unterſtützung nach einem Ungefehr. Dieſe Gewohnheit iſt zwar nicht zu verachten, doch muß alle Unterſtützung nach einem rechten Winkel geſchehen, denn ſie wiederſtehet dem Falle eines Körpers am ſtärkſten. Ein feſter Körper, deſſen Mittelpunct der Schwere von einem andern Körper unterſtützt wird, ruhet auf dieſem; ruhet er auf ihm, ſo drückt auch ſeine Schwere auf ihn, alſo muß der unterſtützende ſo feſte und ſtark ſeyn, daß er jenes und der andern über ihn liegenden Körper Schweren zuſammentrage, ohne zerdrückt zu werden. Hieraus folget, daß man die feſteſten Körper bey Unterſtützung oder Errichtung eines Gebäudes zu unterſt und die lockerſten, leichteſten zu oberſt legen müſſe, wenn das Gebäude nicht einfallen ſoll. Dieſer Satz hat ſeinen beſondern Nutzen bey der

Mauerung in Schächten, Strecken, Geſenken und andern unterirdiſchen Gebäuden.

Alles dieſes vorausgeſetzt, will ich nach oben angenommener Ordnung zu erſt von der Feſtigkeit und Dauer der unterirdiſchen Berggebäude in faſt wagerecht oder ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen handeln. Wenn eine Röſche oder Stollen im Hangenden angeſetzt, und durch dergleichen ſchwebend liegendes Geſteine getrieben wird, ſo iſt, wenn die Steinlagen ganz und nicht zu klüftig ſind, gleich aus ihrer Lage und der zutreibenden Arbeit klar, daß hier keine Unterſtützung nöthig ſey, denn die Steinlagen liegen unter und über einander, und unterſtützen ſich ſelbſt.

Man handelt weislich, wenn man den Stollen in der Firſt rund aushauen läßt, die Arbeit und Koſten der ſonſt an der Firſt auszuhauenden Ecken *b. Fig.* 2. zu erſparen; man gewinnet noch überdies Zeit, giebt der Firſt des Stollens Wölbung und Feſtigkeit gegen den Druck, und die Wetter wechſeln freyer oben an der Firſte hin. Fallen aber auch Sand- Letten- Mergel-Lagen zwiſchen den Steinlagen vor, durch welche die Röſche oder der Stollen getrieben wird, ſo ſind dieſe Stellen mit Zimmerung oder Mauerung abzufangen und zu verwahren, damit ſie nicht, wenn ſie von den Wäſſern erweichet ſind, mit ſelbigen in den Stollen, Röſche fallen, und das, was darüber liegt, nachſtürze, und der Stollen, Röſche, zerbreche. Wie die Zimmerung ausſiehet, und beſchaffen ſeyn ſoll, findet man in den alten Bergbüchern. Nur wollte ich, daß man die Köpfe der Thürſtöcke halb rund einſchnitte, und die Kappen an beyden Enden dergeſtalt vorrichtete, daß ſie da, wo ſie auf die Thürſtöcke zu liegen kommen, nicht zu ſehr geſchwächet, und mit einem kleinen Abſatze, der die Köpfe der Thürſtöcke von einander halten muß, wohl eingeleget würden.

Da-

Damit nun die Thürstöcke wegen ihrer Länge vom Drucke des Gebürges nicht so leicht gebogen, oder gar zerdrücket werden, so legt man insgemein 2. biß 3. Fuß, von der Stollen-Sohle in die Höhe, Stege, oder Hölzer quer über den Stollen zwischen die einander gegenüberstehenden Thürstöcke mit ihren Enden auf den eingeschnittenen Absatz jedes Thürstockes nicht allein zur Befestigung derselben, sondern auch, daß Bohlen darauf geleget werden, die Förderung über dieselben hin geschehen, und die Wässer unter denselben fort laufen können; man nennet diese Zimmerung das Träge- oder Tragewerk. Wenn die Bohlen genau neben einander der Länge nach auf die Stege geleget, und angenagelt werden, daß sie überall und sonderlich mit ihren Einschnitten an den Thürstöcken wohl schließen; so ziehet die frische Luft, wenn alles wohl mit Letten verschmieret worden, unter diesem Trägewerke hin, und bringet dem innern Gebäude gute Wetter; der Raum aber zwischen dem Trägewerke und der Stollensohle wird von den Bergleuten die Wasserseige genannt, worinn die Wässer ablaufen. Da aber alle Zimmerung mit Holze, sie mag so gut gemacht seyn, als sie will, öfters in kurzer Zeit in den unterirdischen feuchten Gebäuden bald zu stocken und zu faulen anfängt, auch das von der Fäulniß angegriffene Holz immer heraus gerissen, und wieder neues eingewechselt werden muß, welches allemal neue Arbeit und Kösten verursachet; so gebe ich den wohlgemeinten Rath, die Mauerung, soviel nur immer möglich, der Zimmerung zu Befestigung der unterirdischen Gebäuden vorzuziehen. An Mauersteinen fehlet es, sonderlich in Gebürgen, die aus schwebend liegenden Erd- und Steinlagen bestehen, niemals. Man findet daselbst die meisten Steinbrüche, nur muß man sich vor merglichten Sand- und andern Steinen, die der Verwitterung unterworfen sind, hüten. In Röschen, Stollen, Strecken wird

mit hinlänglich dicken, breiten und langen, aus dem Gröbſten zugehauenen Steinen gemauert, wobey man ſich nach dem ſtarken, oder ſchwachen Drucke des Gebürges richtet, und die Steine neben und übereinander gewöhnlichermaſſen verbindet, auch hie und da einen längern und gegen des Gebürges Druck breitern Stein in das Mauerwerk mit einleget, daß endlich in der Firſt zu gewölbet wird, wenn es nöthig iſt.

In Gebürgen ſchwebend liegender Steinlagen werden auch Schächte abgeſunken, und, entweder ganz durchaus, oder nur bis auf die erſte feſte Steinlage unter der Damerde gewöhnlichermaſſen verzimmert, ſo aber gar ſelten lange dauert. Auch bey Schächten würde ich lieber die Mauerung anrathen.

Zur Verbeſſerung ſowohl der Schachtzimmerung als Mauerung, in Anſehung der Feſtigkeit, will ich hier einen Vorſchlag thun. Man findet in verſchiedenen Berggegenden, wo auf Eiſenſtein gebauet wird, runde und bisweilen ziemlich tiefe Schächte, die nur mit Knütteln und Zaungärten ausgeflochten ſind, und dennoch dem Drucke des Gebürges ſehr gut widerſtehen. In Engelland und Schottland findet man viel dergleichen Schächte bey den Kohlenbergwerken, ſie werden auch theils wie die runden Brünnen ausgemauert, und widerſtehen dem ſtärkſten Drucke des Gebürges beſſer, als das gerade Holzgezimmer, da ſie die Eigenſchaft der Gewölber haben. Weil ſich aber die runde Geſtalt nicht gut für tiefe Schächte ſchickt, und ihr Durchmeſſer wegen eines aufzuſtellenden langen Rundbaums, worauf ſich viel Seil bey dem Heraufziehen und Hinablaſſen der beyden Bergkübel wickeln muß, folglich ſolche Schächte ſehr weit gemacht werden müſſen, welches mehr Arbeit, Zeit und Koſten verurſachen würde, ſo hat man bisher die länglicht viereckigte Geſtalt noch immer bey-

behal-

behalten, und zur Auszimmerung derſelben gerades gleiches Holz gebraucht, wenige aber ausgemauert.

Wenn ich für mich Bergwerk bauen ſollte, würde ich bey tiefen und untiefen Schächten mich einer länglicht runden Figur bedienen, die Wölbung derſelben gegen den ſtärkeſten Druck des Gebürges richten, und die Jöcher, wenn mir die Ausmauerung gar zu koſtbar wäre, von krummen Holze machen und damit auszimmern laſſen; der Fahrſchacht aber würde in der einen Spitze dieſer Figur angebracht, und, wie gewöhnlich, gegen den Ziehe-Schacht mit Einſtreichen und Brettern verſchlagen werden.

Hier wird der Bergmann lächeln, die länglicht runde Figur zu Schächten für zu künſtlich halten, ihre Stärke aber vielleicht nebſt dem Thunlichen nicht gleich einſehen, und fragen, wo er das krumme Holz dazu hernehmen ſollte. Ich will es ihm ſagen: Alle Jahre wird in den Wäldern Holz gefället und ausgeäſtet; man gebe denen, ſo darüber zur Aufſicht beſtellet ſind, ein Model zur erforderlichen Krümme des Holzes, ſo zu den Jöchern dienen ſoll, und bezahle auf die Klafter ſolches Holzes etliche Kreuzer mehr an Forſtgebühren, ſo wird ſich krummes nach dem Model brauchbares, ſonderlich Eichenes von Zeit zu Zeit genug ſammeln laſſen; denn es werden bey Bergwerken nicht alle Jahre ſo viel Schächte abgeſunken, daß ſich nicht genugſames krummes Holz zu ihrer Auszimmerung finden ſollte. Gehet es in manchen Ländern an, daß Knieholz zum Schiffbau geſammelt wird, ſo wird es auch angehen, in den Bergwerken nahe gelegenen Wäldern krummes Holz zu Schächten, ſonderlich von ſtarken Aeſten zu ſammeln, welche mit der Säge getrennet und ſo ſtark geſchnitten werden können, als ſie zur Schachtzimmerung nöthig ſind. Dergleichen krumme Hölzer werden über 5. 6. bis 8 Zoll zu Jöchern

nicht

nicht dicke ſeyn dürfen, weil ſie einen viel gröſsern Druck, als gleichgewachſenes Holz aushalten. Man mache den leichten Verſuch, und ſuche beyde Gattungen Holz, das gleiche krumm, und das krumme gleich zu beugen, ſo wird man, wenn beyde Hölzer von einerley Dicke und Länge, auch einerley Art ſind, den Unterſchied der Kraft ſo gar mit Händen fühlen, ſo bey ihrer Beugung angewandt werden muß. Das krumme Holz wird mehr Widerſtand als das gleiche leiſten; will man die Urſache hievon wiſſen, ſo betrachte man beydes, und es wird ſich zeigen, daß die Faſern des gleichen Stückes alle gleich und gerade nebeneinander hin liegen, bey dem krummen aber dieſelben maſslich und knörzlich, vielmal ganz wellenförmig innerhalb ſeiner Krümmung feſt in einander gewachſen, auſserhalb derſelben aber geſpannet ſind; ſollte dieſes nicht mehrere Stärke des krummen Holzes verurſachen?

Die Stärke und Dauer eines ſolchen mit krummen Holze ausgezimmerten Schachtes fällt zu deutlich in die Augen, als daſs ſie eines weitern Beweiſes bedarf; und da das krumme knörzliche Holz auch der Feuchtigkeit, und Fäulniſs mehr widerſtehet, als das gleiche, ſo wird die Zimmerung mit krummen Holze auch deſswegen vor dem gleichen den Vorzug haben. Die Zimmerlinge bey Bergwerken verarbeiten zwar das gleiche Holz lieber, als krummes und knörzliches; man muß ſich aber daran nicht kehren, ſie müſſen thun, was ihnen befohlen wird, oder es giebt andere an ihre Stelle. Der Nutzen der bauenden Gewerken muß das erſte Geſetz ſeyn; denn ſie geben das Geld dazu her. Die 3. Fig. zeiget dergleichen länglichte runde Schachtzimmerung, da *a* der Zieheſchacht, *b* der Fahrſchacht, *c* die Jöcher, *d* die Kappen, *e* die Fahrt, und *f* die Löcher zu den Haſpelſtützen andeuten.

Da die Mauerung der Festigkeit wegen aller Holzzimmerung vorzuziehen ist, so sollte man lieber die Haupt- und Förderschächte ausmauern lassen, aber nicht auf die bisher gewöhnliche Weise, da alle halbe oder ganze Lachter auf gemeine senkrechte Mauer wieder ein oder zwey Bogen, sowohl an den beyden langen Seiten, als auch an den beyden kurzen Stössen des Schachtes von der Sohle bis zu Tage ausgemauert werden. Obgleich diese Bögen der Mauerung in ihrer senkrechten Linie Stärke gegen ihren eigenen Druck geben, so können sie doch dem Seitendrucke des Gebürges, welcher zugleich von dessen senkrechtem Drucke mit abhänget, nicht vielmehr als eine gemeine Mauer widerstehen; diesem Seitendrucke aber, auf welchen man hauptsächlich sein Augenmerk richten muß, will ich eine festere und standhaftere Mauerung in den Schächten entgegen setzen, welche aus Fig. 4. zu ersehen ist. Bauverständige werden ihre Stärke und Dauer gleich aus der Betrachtung ihrer Gestalt deutlich einsehen; *a* ist der Zieheschacht, *b* der Fahrschacht *cc* Löcher vor die Haspelstützen, so aber bey einem grossen Treibe Schachte nicht nöthig sind, *d* die Fahrt.

Wie die Steine bey dergleichen Mauerung in einander zu verbinden seyn, wird ein Mauermeister, der sein Handwerk verstehet, leicht finden; ich habe dabey weiter nichts zu erinnern, als daß, wo der Druck nicht allzustark ist, Lachter um Lachter gemeine Mauerung der Höhe nach zwischen die liegende Wölbung gesetzt werde; bey donnlegigen oder flachen Schächten könnte es bey der bisher gewöhnlichen Bogenmauerung bleiben, ob ich gleich, so viel nur immer möglich, flache Absinkung der Schächte vermeiden würde.

Wo zwiſchen ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen Kupfer- oder Alaunſchiefer, Zinnerze, Kieſe, Steinkohlen, Torf, Farben- oder andere Erden und brauchbare Steine liegen, wird, wenn man dieſe Dinge weghauen und gewinnen will, die darüber liegende Steinlage oder das ſogenannte Tach entweder mit dem zugleich ausgehauenen Geſteine hie und da, wie bey der Schieferarbeit gewöhnlich iſt, unterſchlagen, oder man läßt ein Lachter um das andere Bergfeſten davon ſtehen, die das Tach ſo lange unterſtützen, bis das Feld gehörig mit Oertern und Strechen rechtwinklicht zwiſchen den Bergfeſten durchfahren, und das Erz- oder Mineral aus ſelbigen gewonnen iſt; da man denn zuletzt von der tiefſten Gegend herauf die aus Erz- oder Mineral beſtehenden Bergfeſten nach einander weghauet, Erz- und Mineralien davon zu Tage ausfördert, und das Tach alsdenn ſtürzen läßt. Es iſt alſo hier weder Zimmerung noch Mauerung nöthig; wo aber das Tach nicht gut iſt, oder gar rolliges Gebürge, Sand, Kieß, Mergel, Letten vorfällt, da muß auf Zimmerung und Mauerung gedacht werden.

Was die in manchen ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen durchſetzende Gänge oder Wechſel betrift, ſo wird bey Bearbeitung derſelben in Anſehung der Unterſtützung und Befeſtigung des flüchtigen und loſen Geſteins eben das in Obacht genommen, was im folgenden Abſchnitte bey den Erz- und Mineralgängen in erhobenen Erd- und Steinlagen kürzlich angeführet werden wird. Im übrigen ſtehet insgemein das ſchwebend liegende Gebürge an- und vor ſich gut, und erfordert weniger Zimmerung und Mauerung als das erhobene.

Von der Festigkeit und Dauer der unterirdischen Berggebäude in erhobenen Erd- und Steinlagen.

Eine Rösche, Stollen, so in dieser Art von Gebürgen durch ganzes festes Gesteine getrieben wird, hat wenig oder gar keine Mauerung oder Zimmerung außer dem Trägewerke nöthig, und wenn ihre First rund ausgehauen wird, so trägt, wie bereits oben gedacht worden, dieses zu ihrer Festigkeit und Dauer ungemein viel bey; in rolligen, klüftigen Gesteine aber müssen dergleichen unterirdische Gebäude mit Zimmerung oder Mauerung nach obigen Grundsätzen des vorhergehenden Abschnittes gegen den Einsturz versehen werden.

Wegen der Schachtzimmerung und Mauerung berufe ich ich mich hier wiederum auf das, was ich in dem vorigen Abschnitte beygebracht habe, weil es sich auch in erhobenen Erd- und Steinlagen anwenden läßt.

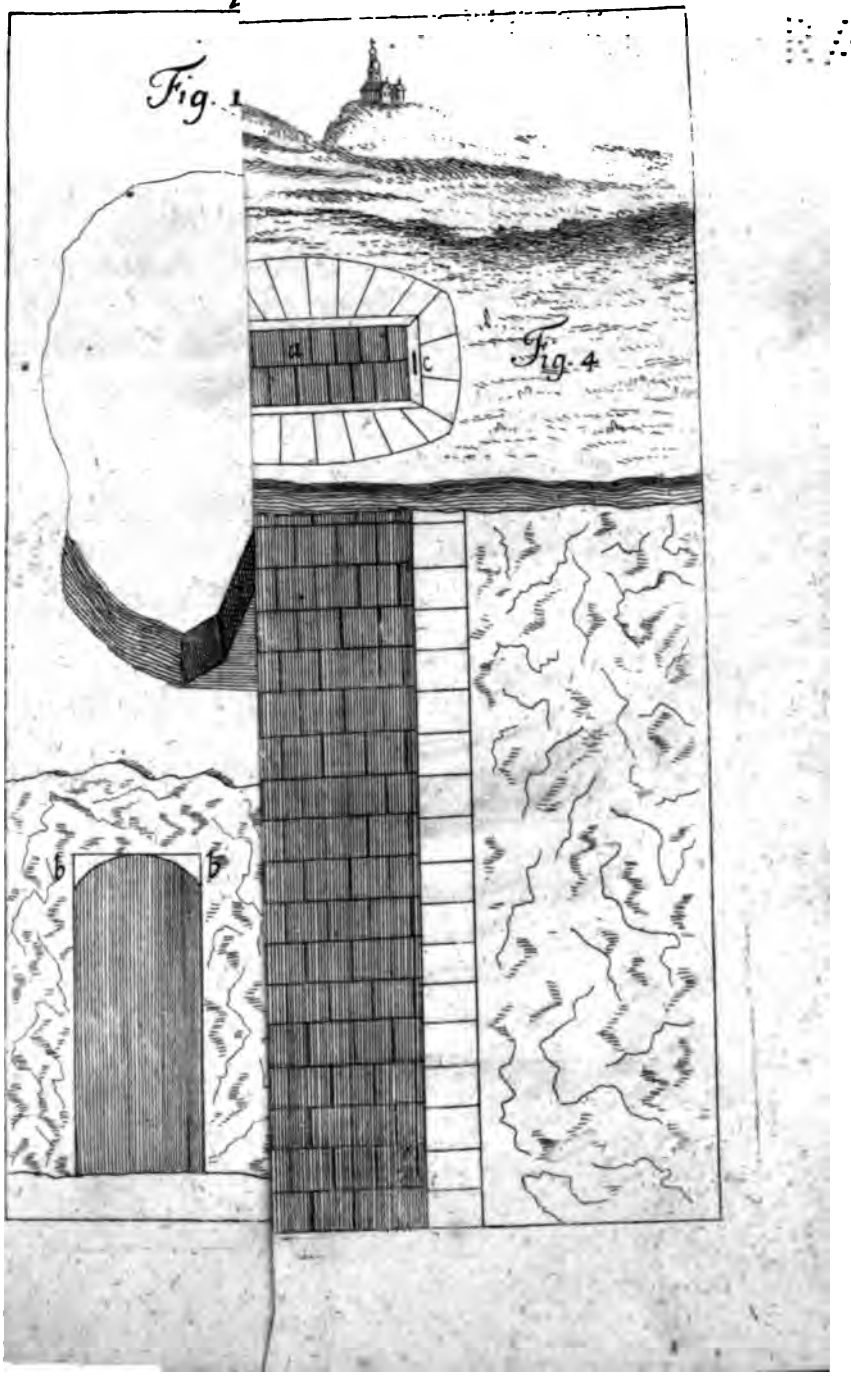
Die Zimmerung und Mauerung in den Gesenken ist, wie in den Schächten.

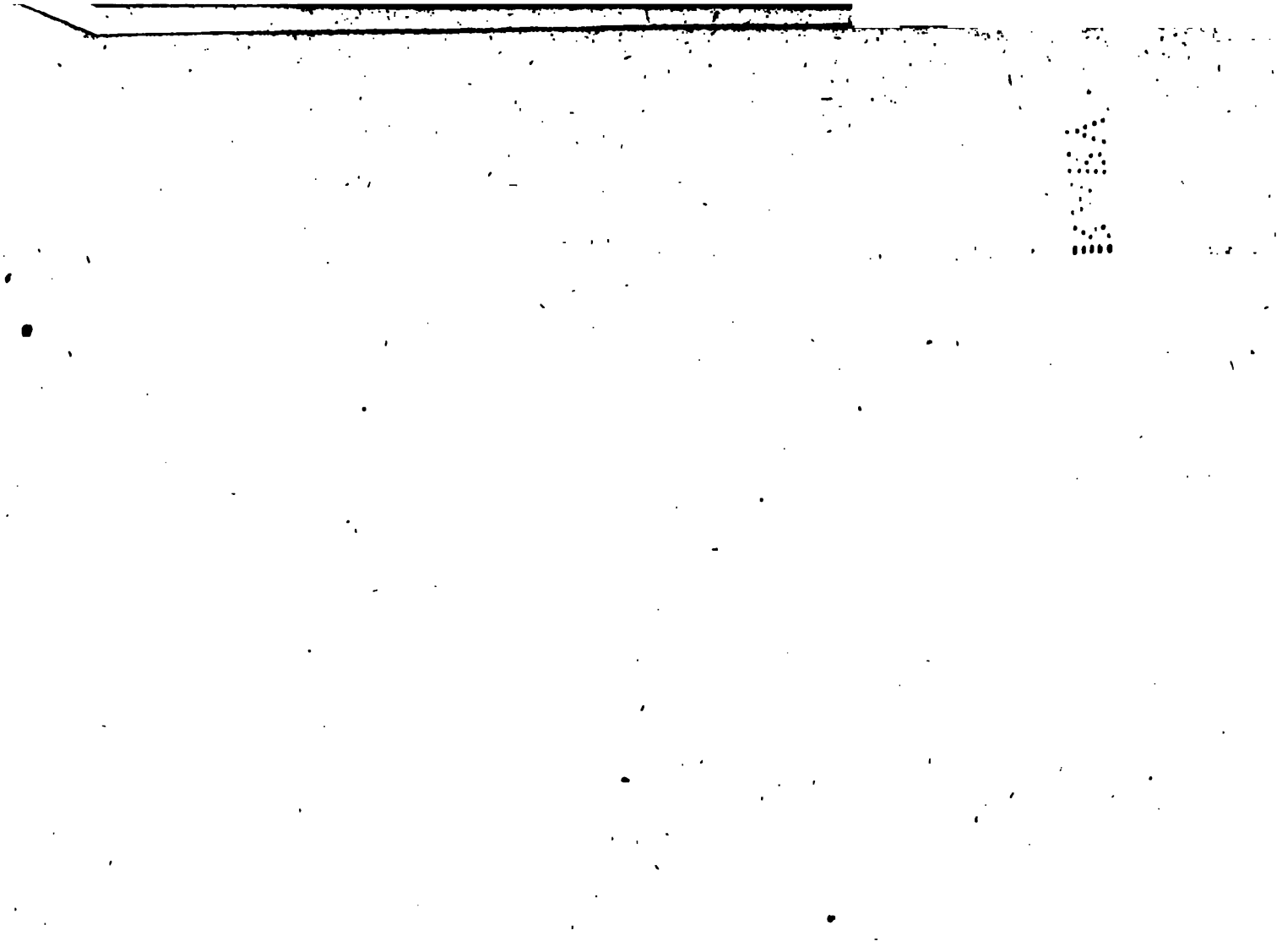
Von der Unterstützung des rolligen klüftigen und flüchtigen Gesteines und Gebürges in den Strecken, Ueberschbrechen, Flügelörtern, Firsten, Hornstädten, und auf Strossen läßt sich in einer so kurzen Schrift, wie die gegenwärtige ist, keine recht deutliche Beschreibung abfassen. Wer sich einen richtigen und deutlichen Begrif davon machen will, thut am besten, sie in den unterirdischen Berggebäuden selbst aufzusuchen und in Augenschein zu nehmen; weil es aber auch nicht jedes Gewerken oder Bergwerks Liebhabers Sache ist, sich schmutzige Hände zu machen, und mit einiger Ungemächlichkeit sich in die finstere Unterwelt zu begeben, so empfehle ich ihnen die gewöhnlichen Zimmerungs- und Befesti-

gungsarten unterirdiſcher Berggebäude im Löhneis und Röſslers Bergbauſpiegel auf den daſelbſt befindlichen Kupfern nachzuſehen, wo ſie noch am beſten vorgeſtellet ſind.

Die Bergleute haben im übrigen zu ihrer Zimmerarbeit nebſt einem Zollſtabe ein Maaß, das ſie eine Lehre nennen; es beſtehet aus zwey einzelnen Stäben, und mit dieſen meſſen ſie die Länge, Breite und Höhe desjenigen Ortes, wo Holz zur Unterſtützung und Befeſtigung des Geſteines oder Gebürges hingebracht werden ſoll, indem ſie dieſelben bald kurz, bald lang aneinander halten, und das zur Unterſtützung nöthige Holz damit ausmeſſen: dieſe Art iſt ihnen ungemein bequem, weil ſie dieſelbe unter der Erde überall auch in den allerengſten Oertern zur Ausmeſſung gebrauchen können.

Ph. abh. VII T. 1





Verſuche

ſit mineraliſchen ſauern Geiſtern aus den Hölzern Farben zu ziehen:

dann

ſfällige Gedanken, wie aus dieſen Farben die öthe, Blaue, Grüne, und Gelbe der Blüthen, Blumen, Früchten, und Blätter der Vegetabilien zu erklären.

Von

Mathias Brunnwiſer,

r Philoſophie, und Arzneygelehrtheit Doctorn, dann Stadtphyſikus zu Kehlheim, 1770.

Unter den merkwürdigen Begebenheiten, ſo die auf vielerley Art ſpielende Natur unſern Augen darſtellet, verdienen gewiß die Farben der Blätter, Blüthen, Blumen, und Früchten, mit welchen die Bäume und Pflanzen gezieret ſind, nicht einen geringen Platz.

Die grüne, blaue, rothe, gelbe, und von deren Vermiſchungen abhangende Farben ſind Wirkungen, wo die Natur ihre Bearbeitung unſern Blicken zu entziehen alle Sorgfalt anzuwenden ſcheinet. Und daher ſind meines Erachtens die Erklärungen der Pflanzenfarben entweder gar nicht berührt, oder auf hypothetiſche, und ſchwankende Gründe geſtützet worden.

Ich gedenke keineswegs in gegenwärtiger Abhandlung Jemanden zu überreden, daß ich etwas ungezweifeltes, oder unverwerfliches beweiſen werde. Ja ich will vielmehr im Gegentheil bekennen, daß ich die Schwierigkeiten dieſer Sache ſelbſt einſehe, und viele mir ſelbſt gemachte Einwürfe gänzlich zu heben außer Stand mich befunden habe. Und daher wünſche ich, daß die aus meinen Erfahrungen gemachte Schlüſſe nicht anders, als zufällige

fällige Gedanken angeſehen werden möchten. Habe ich in dieſen meinen Gedanken gefehlet, ſo ſchmeichle ich mir um deſto eher Vergebung zu erhalten, als ganz ſicher Fehlen menſchlicher iſt, als gar nicht denken.

So oft ich die Verſchiedenheit der Holzfarben in den friſch abgehauenen Stämmen, und die Veränderung derſelben, nachdem ſolche eine lange oder kurze Zeit in freyer Luft gelegen, nicht minder die öfters in den Wäldern gefundene dunkle, oder lichtbraune von der Fäule angegriffene Hölzer, auch jene weiße Farbe, ſo einige faſt verweſene, und im Finſtern leuchtende angenommen, mit einer Aufmerkſamkeit betrachtet habe; ſo iſt meine Muthmaſſung jederzeit dahin gegangen, daß ein gewiſſes Farbeweſen in den Hölzern verſteckt ſeyn müſſe.

Fichten, und andere Hölzer, wenn ſie lange der Luft ausgeſetzt ſind, werden von Zeit zu Zeit auf der Oberfläche gelber. Dieſe Farbe aber bleibt nicht für beſtändig, ſie wird nach und nach unſichtbar, und kömmt anſtatt dieſer eine blaulichte, oder blaulicht graue hervor.

Da in dem erſten Umſtande das Holz noch in ſeinem Zuſammenhang bleibet, ſo ſcheinet in dem andern, nämlich bey Entſtehung der blaulichten Farbe der Zuſammenhang auf der Oberfläche etwas getrennet, und das Holz einer Auflöſung unterworfen zu werden, oder wenigſtens iſt das gelbe von dem Holze auf der Oberfläche losgemachte, und unſerm Geſichte vorgeſtellte Farbeweſen von dem Ganzen des Holzes durch die Witterung u. ſ. w. abgeſöndert worden, weil ſichtbare Faſen von dem Ganzen ſich ablöſen, und folglich zu vermuthen geben, daß jenes, ſo die gelbe Farbe gemacht, von dem Ganzen gekommen, und die Abſönderung der Holzfaſen verurſachet habe.

Dieſe

Dieſe Faſen ſind die Materie, womit Weſpen, nnd dergleichen Inſecten ihre Neſter bauen, welche ebenfalls die Farbe haben, ſo das der Luft ausgeſetzte Holz an ſich genommen hat. Und ſowohl dieſes, als die Gelbe giebt Anlaß auf eine innerliche im Holze ſteckende Farbe zu ſchließen.

Dieſe Erſcheinungen alſo überredeten mich, daß ein Farbeweſen, welches unſichtbar im Holze gebunden verſteckt lag, gegenwärtig ſeyn müſſe. Es war aber guter Rath theuer, wie dieſes von dem Holze abzuſöndern wäre, oder wenigſtens dem Auge erkenntlicher werden konnte. Wäſſer, und brennbare Geiſter, als die in dieſen Umſtänden gewöhnlichen und gebräuchlichſten Auflöſungsmittel, leiſteten mir keine, oder in ein und anderm nur ſehr geringe, und faſt unmerkliche Dienſte, gaben auch zugleich zu erkennen, daß dieſe aus mir noch unbekannten Urſachen keine Gewalt auf das im Holze ſteckende Farbeweſen haben müßten. Andere aber, und beſſere wollten mir nicht gleich beyfallen, obwohl mir die Natur den Schlüſſel, den ich Anfangs nicht erkennen wollte, in die Hände lieferte. Denn alle oder doch, die mehreſten Hölzer, wenn ſie abgehauen worden, ſind meiſtentheils weiß, Z. B. Irlen. In einer kurzen Zeit aber leidet dieſes Holz in der Luft eine ſtarke Aenderung, und erſcheinet gelb gefärbt. Dieſe in der Farbe hervorgebrachte Aenderung aber konnte keine andere Urſache zum Grunde haben, als die Luftſäure, ſo auf die Oberfläche des Holzes gewirket hat.

Da nun dieſe Erwägung ſowohl als die Erfahrungen des Herrn Marggrafs, wovon ich hernach reden werde, meiner Einbildung ſehr ſchmeichelten, ſo folgte ich der Natur, und zog mineraliſche ſaure Geiſter den Brennbaren, und Wäſſern, als ein Auflöſungsmittel die Farben zu erhalten, vor, weil mineraliſche ſaure Geiſter, wo nicht alle, doch wenigſt ein oder der andere eine

mehrere Aehnlichkeit mit der Luftſäure haben müſſe, oder konnte, als brennbare Geiſter, und Wäſſer.

Um nun in dieſer Sache eine Probe zu machen, und meiner gefaßten Meinung ein Genüge zu thun, beſtrich ich die gehobelte Oberfläche von verſchiedenen Hölzern mit mineraliſchen ſauren Geiſtern, und erſah zu meinem Vergnügen, daß dieſe nicht allein mehr Gewalt als Wäſſer, und brennbare Geiſter ausübten, ſondern auch das Geſuchte willig reichten. Ich erblickte nach ein- oder mehrmaliger Beſtreichung, und allzeit im Zimmer geſchehener Trocknung auf den Hölzern eine gelbe, eine rothe, und eine blaue Farbe, nur mit dem Unterſchied, daß die rothe, und blaue in der Geſtalt der Violeten erſchienen, zum Zeichen, daß die rothe mit der blauen, und die blaue mit der rothen vermiſcht ſey. Es zeigen ſich alſo die meiſten Hölzer, nach Unterſchied der angebrachten Geiſter, entweder ganz gelb, oder aber blau- und roth Violet. Daher will ich mich bey fernerer Benennung dieſer zwoen letzten Farben allzeit des Worts Violet bedienen.

Zwetſchgenholz mit Violetſäure giebt eine roth-dunkle violete Farbe, faſt alſo, wie noch nicht vollkommen zeitige Zwetſchgen, wenn der auf ſelben liegende blaue Reiff abgewiſchet worden, ausſehen. Birn- und Aepfelbaumholz iſt nicht ſo dunkel, ſondern mehr roth, Schlehen fällt mehr ins Blaue, wie das Roſen- und Heckenroſenholz in das licht Violete. Arlsbeerholz iſt angenehm roth Violet, die groſſe Weide durchſcheinend blau Violet. u. ſ. w.

Man muß ſich aber nicht zu ſtreng in die Beſchreibung halten. Ich beſchreibe die gefärbten Hölzer, wie ich ſolche bald nach genugſamer, aber auch nicht zu vieler Anſtreichung bemerket habe; denn nach einer Zeit verſchwindet in vielen Hölzern die

blaue

blaue Farbe ganz oder in etwas, und macht, daß die Gestalt von der Beschreibung abweiche. Auch kömmt es darauf an, wie man die Hölzer stark oder schwach mit den sauren Geistern überziehet. Kömmt man mit der Vitriolsäure zu stark, und bringt es zur Wärme, so werden viele Hölzer mit einer glänzenden Schwärze überzogen: glaublich darum, weil durch Beyhilfe der Wärme einige in dem Holze steckende Eisentheile aufgelöset werden, und zu dieser Erscheinung Gelegenheit geben.

Gleichwie aber die mineralischen sauren Geister jeder für sich bemeldte Farben in den mehresten Hölzern sichtbar machen, so scheinen sie doch sowohl nach dem Unterschied der Hölzer, als ihrer selbst einen Ausnahm zu machen.

Die Salzsäure kömmt in Hervorbringung gleicher Farbe mit Vitriolsäure am öftesten überein, jedoch nicht allzeit, und viel schwächer. Als etwas besonders habe ich bemerket, daß die Salzsäure aus dem wälschen Nußbaumholz, wenn es sehr oft überstrichen wird, eine Olivenfarbe ausziehet, welches andere Säure nicht thut. Auch weder dieser noch andere sauren Geister ziehen aus andern Hölzern, so vielfältig ich auch Versuche angestellt habe, eine in das Grüne fallende Farbe heraus.

Die Salpetersäure erzwinget zwar ebenfalls die violete Farbe anfänglich bald, aber es macht zugleich, daß nach öfterm Anstreichen das Holz gelb, und also die violete Farbe entweder verflüchtiget, oder in die Gelbe versenket wird. Daher kann man mit dieser Säure in verschiedenen Hölzern vom Lichtgelben bis zur Bräune die Farben hervorbringen.

Die gelbe Farbe ist allem Ansehen nach einer Verflüchtigung nicht unterworfen, wo hingegen die rothe, besonders aber die blaue alle

Merkmaale einer Flüchtigkeit zu haben ſcheinen; oder wenigſtens hat die Salpeterſäure die Kraft, die rothe, und blaue in die gelbe zu verſenken.

Warum aber dieſe drey Säuren nicht auf gleiche Weiſe, und nicht in gleicher Geſchwindigkeit die Farben ausziehen, und die Salpeterſäure die violete verflüchtiget, oder auch verändert (ich getraue mir aus ſeinen Urſachen in dieſem Puncte nichts gewiſſes zu beſtimmen, obwohl ich für die Verflüchtigung eher ſtehen wollte) die Vitriol- und Salzſäure aber die violete, und nicht die gelbe ſichtbar machet, kann ich, ungeachtet ich eine Menge Experimenten gemacht, doch nicht beantworten, finde es auch zu meinem gegenwärtigen Ziel und Ende zu beantworten eben nicht für nothwendig. Vieleicht iſt in dem abgängigen, gegenwärtigen, oder durch die Miſchung hinzukommenden Phlogiſton oder andern in den mineraliſchen Geiſtern, oder Hölzern ſteckenden noch unbekannten Dingen die Urſache zu ſuchen. Denn da wir wiſſen, daß die Auflöſungsmittel den aufzulöſenden Sachen, und Niederſchlagungsmittel den niederzuſchlagenden angemeſſen ſeyn müſſen, ſo wird ohne Zweifel in dieſen die Urſache verborgen liegen.

Scheidewaſſer löſet das Gold nicht auf, bis der Zuſatz ſolches geſchickt, und ein Goldſcheidwaſſer macht, und nicht mit jeder Sache wird eine Præcipitation bewirket; und da es kein Geheimniß mehr iſt, daß mineraliſche Körper nebſt den reſinoſen, gumoſen, und anderen Theilen in den Pflanzen befindlich ſind, ſo kann es gar wohl ſeyn, daß gleichwie die Mineralien verſchiedene Auflöſungsmittel nach ihren inneren Beſtandtheilen fordern, auch ein gleiches nach der verſchiedenen Miſchung der gumoſen, harzichten, erd- und eiſenhaltigen Beſtandtheilen die Pflanzen zu zerlegen, oder ihre Farben zu gewinnen angewandt werden müſſe. Mehrere, und genauere Verſuche müſſen dieſes klärer machen,

chen, und in dieser dunkeln Sache zu gewissen Schlüssen Gelegenheit geben.

Da ich mich aber jetzt in diese Untersuchung nicht einlassen kann; so begnüge ich mich mit dem, daß ich eine gelbe, eine rothe, und eine blaue Farbe aus vorerzählten meinen Versuchen gewiesen, und deutlich vor Augen gelegt habe. Und eben diese drey Farben, nicht mehr oder weniger werden erfordert, uns jenes Reizende zu zeigen, was wir an den Blumen, Blüthen, und Früchten für so schön, und angenehm schätzen. Diese drey Farben, und ihre von der Natur geschehende Vermischung sind es, was unsere Augen in den Gärten, Wiesen, und Wäldern ergötzet, und besonders einen Naturforscher mit Verwunderung erfüllet.

Ehe ich aber dieses beweise, muß ich zuvor zeigen, warum die mineralischen sauren Geister, und nicht ebenfalls andere Feuchtigkeiten die Farben aus den Hölzern zu ziehen vermögend sind.

Der unter den Gelehrten so berühmte als einsichtvolle Naturforscher Herr Marggraf, Director der königl. preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin, hat in dem zweyten Theile 49sten Seite seiner chymischen Schriften das alcalische Salz ohne Einäscherung der Pflanzen zu gewinnen gelehret, und zugleich überzeugend bewiesen, daß in allen Pflanzen ein wesentliches alcalisches Salz enthalten sey.

Ich hatte zwar gegen die Untersuchungen, und Erfahrungen dieses gelehrten Manns nicht den mindesten Zweifel. Jedoch glaubte ich, daß ich in gegenwärtigen meinen Versuchen ebenfalls meine Augen überzeugen, und in dieser Sache fernere Proben machen müßte. Zu dem Ende habe ich die mehresten Versuche des Herrn Marggrafs nachgemacht, und zugleich viele andere mit den Höl-

zern, aus welchen ich das Farbeweſen auszuziehen dachte, unter Hand genommen, und in allen meinen neuangeſtellten Verſuchen jederzeit das alcaliſche Salz nach Wunſche erlanget.

Von dieſem Salze alſo ſowohl, als von den Farben, welche ich mit ſauren mineraliſchen Geiſtern aus den Hölzern gezogen, überzeuget, machte ich den Schluß, daß dieſes weſentliche alcaliſche Salz die Urſache, oder wenn noch andere zugegen ſeyn ſollten, die Haupturſache ſeyn müſſe, warum die Hölzer ihre Farben, ſo ſie eben ſo gewiß, als das alcaliſche Salz in ſich haben, unſern Augen verborgen halten.

Dieſes alcaliſche Salz iſt mit dem Farbeweſen in einer genauen Verwandſchaft, und ſie ſchließen ſich gemeinſchaftlich ſo feſt, und ſo lang in einander ein, das weder eines noch das andere zu erlangen iſt, bis die mineraliſchen ſauren Geiſter (denn mit dem Acido vegetabili, und animali habe ich keine Verſuche gemacht) angebracht werden, mit welchen ſich das alcaliſche Salz vereiniget, die nähere Verwandſchaft des Alcali mit der Säure dem Farbeweſen die Feſſeln abnimmt, ſolches in Freyheit ſetzet, und unſern Augen ganz ſichtbar vorſtellet.

Da alſo weder Wäſſer, noch brennbare Geiſter eine Gewalt in das alcaliſche Salz haben, und folglich die Bande, die ſolches mit dem Farbeweſen vereinigen, zu trennen unvermögend ſind; ſo folget von ſich ſelbſt, daß mit ſolchen das Farbeweſen nicht erlanget werden kann, außer es hätte ſich dergleichen mit gumoſen, oder harzichten Theilen verbunden, wo ganz natürlich geſchehen müßte, daß dieſes mit jenen aufgelöſt erhalten werden müßte.

Dieſer mein gemachter Schluß gründet ſich auf die oben gewieſenen Erfahrungen, nämlich, daß die ſauren mineraliſchen Geiſter wirklich das Farbeweſen auf den Hölzern zuwege gebracht haben. Ungeacht deſſen aber dünkte es mich, daß dieſe Verſuche, und Erfahrungen nur eine halbe Probe machten. Sollte alſo dieſer Schluß ſeine ganze Richtigkeit erlangen, ſo müßte ein alcaliſches Pflanzenſalz, wenn ſolches auf das durch die ſauren Geiſter gefärbte Holz angebracht würde, um eine ganze Probe zu machen, das losgemachte Farbeweſen nothwendiger Weiſe wiederum binden, in ſich nehmen, und dem Auge entziehen.

Deſſen mich zu verſichern, nahm ich verſchiedene Hölzer, beſonders aber Lindenholz, beſtrich ſolches mit Vitriolſäure, und zwang nach und nach die violete Farbe heraus. Sobald ſie getrocknet, und ſichtbar geworden, überſtrich ich ſolche mit einem reinen oleo tartari per deliquium ein oder mehrmal nach Gutbefinden. Auf welche Behandlung die violete Farbe nach und nach vollkommen wiederum ſich zu verlieren anfieng, und das Holz, wie zuvor, weiß erſchien, auch zugleich bekräftigte, daß das angebrachte alcaliſche Salz das Farbeweſen wieder in ſich genommen, und mit ſelbem ſich verbunden habe. Es fielen auch die vielfältigen Verſuche jederzeit gleich aus.

Mit dieſer neuen Verbindung des Farbeweſens mit dem alcaliſchen Salze, welche mir die Wahrheit meines Salzes bekräftigte, war ich noch nicht zufrieden, ſondern ich wollte auch ſehen, wenn das oleum tartari per deliquium mit Vitriolſäure wiederum geſättiget würde, ob das Farbeweſen mehrmalen zum Vorſchein komme. Nachdem alſo das Farbeweſen wiederum künſtlich verbunden geweſen, ſo beſtrich ich das farbenloſe Holz abermal mit Vitriolſäure, und es zeigte ſich die Farbe wiederum, wie zuvor

vor, daß ich alſo keinen Zweifel mehr haben konnte, daß die Natur eben dieſe Mittel an die Hand nehme die Farben zu verbergen, oder in Vorſchein zu bringen, die durch Kunſt angewandt worden, ſolche zu erlangen.

Bey dieſem Verſuche iſt zu merken, daß man mit der Vitriolſäure etwas ſparſam umgehen müſſe, wo im Gegentheil, wenn dieſe zu ſtark in das Holz eindringet, und in den Holzfaſen eine gar zu grobe Wirkung machet, zwar das Geſuchte erlangt wird, aber gelblichte Flecken in dem Holze zurückbleiben, wie dann ohnedem das erzeugte Mittelſalz die Weiße des Holzes in etwas verunreiniget, aber dieſer Urſache wegen doch keineswegs die Erfahrungen ungewiß machet.

Weiters iſt zu merken, daß zu dieſen Verſuchen ein friſches Holz beſſer, als ein dürres iſt, weil durch die Austrocknung ſchon einige gumoſe u. ſ. w. Theile ſtark verändert worden, welches ebenfalls zu den gelblichten Flecken Anlaß giebt.

Aus dem bisher angeführten wird man ſchon abnehmen, daß ich nicht geſinnet ſey, den Pflanzen ihren Schmuck aus dem Sonnenfeuer anziehen zu laſſen, noch die Urſache der Farben in einer Verdickung der Nahrungsſäfte zu ſuchen, ſondern daß ſelben die Natur ihre gefärbte Kleidung aus dem Schooße ihrer Stämme ohne weitſchichtige Umſtände ganz ungezwungen mittheile.

Ich gedenke auch nicht, mich in eine Abhandlung von Farben einzulaſſen, noch zu unterſuchen, weſſen Natur, und Eigenſchaft dieſes im Holze ſteckende Farbeweſen ſey, oder wie ſolches in die Stämme der Pflanzen von der Natur geſetzt worden, ſondern ich will nur erklären, wie aus dem Stamme die Farbe, welche ſich durch die mineraliſchen Geiſter im Holze gezeiget, in die Blüthen,

Früch-

Früchten und Blätter übergebracht, und sichtbar werden: welches ich mir auf folgende Weise vorstelle.

Das Farbewesen in dem Holze ist mit dem alcalischen Salze gebunden, dessen mich die mineralischen sauren Geister in den erzählten Versuchen überführet haben. Diese zwey innigst vereinigten Dinge werden mit andern Nahrungssäften in die Zweige, und von da in die äußersten Theile der Oberfläche der Blüthen, und Blumen getrieben. Die Luft, welche solche unmittelbar umgiebt, berühret solche, und wirket mit ihrem in sich haltenden Acido in die Blüthen und Blumen auf der Oberfläche, vertilget auch, oder sättiget vielmehr das alcalische Salz, und also entwickelt sich die Farbe, wie sie sich entwicklet, wenn ein Acidum auf ihrem Holze angebracht wird.

Es kömmt hernach nur darauf an, wie die Zuführungssaftadern in ihrem Baue beschaffen sind, ob viel, wenig oder gar nichts mit alcalischem Salze verbundenes Farbewesen durchgelassen, und auf die Oberfläche gebracht wird, oder ob nicht mit diesem ein gewisser Saft ebenfalls mit durchdringet, der der schwachen Luftsäure Hindernisse im Wege leget, wodurch die Entwicklung der Farben verhindert wird. Denn es giebt Blumen, und Blüthen, welche viel, wenig oder gar nicht gefärbet sind, so von bemeldten Ursachen herzukommen scheinet. Endlich wenn die Blüthe abgefallen, und die Früchten nach und nach in ihrem Wachsthume zunehmen, so wird den Frühling, und Sommer hindurch nach Art der Frucht soviel Farbewesen zugeführt, daß die Luftsäure auf der Oberfläche der Früchten soviel entwicklen kann, und muß, daß einige ganz blau, wie Zwetschgen, andere roth, wie Kirschen, einige aber gesprängt, wie Birn und Aepfel, aussehen, und ganz oder zum Theil

jene Farben erhalten, die die Hölzer mit behandelten mineral Säuren gezeiget haben.

Die Luftſäure, auf welche ich mein Syſtem gründe, wird mir Niemand widerſprechen. Das Anroſten einiger Metalle, und Halbmetalle in freyer Luft, ein der Luft ausgeſetztes Laugenſalz, und dadurch erhaltenes Mittelſalz, ja die allgemeine Meinung leiſten mir genugſame Gewehrſchaft, daß eine Säure in der Luft enthalten ſey. Daher will ich mich mit Erprobung dieſer nicht weiter aufhalten, ſondern zu der Grüne der Blätter, und unreifen Früchten mich wenden.

Ein gelehrter Engelländer Eduard Delaval * glaubt, daß die Grüne der Pflanzen vom Eiſen herrühre, ſo in den Pflanzen verbreitet, und durch die Luftſäure in einen Vitriol verwandelt worden.

„ Die Quantität des in den Pflanzen enthaltenen Eiſens, „ ſagt er, wird jenen zu Hervorbringung ihrer Farbe nicht zu klein „ dünken, welche wiſſen, daß ein Gran Vitriol 10000 Granen „ Waſſer ſeine Farbe mittheilet, wovon nur ein kleiner Theil Ei„ ſen, das mehreſte aber ein Saures, und Waſſer iſt. „

Ich gedenke gar nicht die Meinung dieſes gelehrten Engelländers zu beſtreiten, aber ich muß ſagen, daß die Mühe, die ich angewandt, aus ſehr vielem grünen Saft der Pflanzen eine Spur eines Vitriols zu entdecken, ganz und gar umſonſt geweſen iſt.

Und

*) Philoſophiſche Transactionen 55. Band für das Jahr 1765. art. 3. ſiehe auch neu Bremiſches Magazin I. Band Fol. 615.

Und deßwegen glaube ich, daß, weil man versichert ist, daß wirklich ein alcalisches Salz in den Pflanzen enthalten ist, und auch ebenfalls eine violete Farbe in selben die mineralischen sauren Geister gezeiget, aus Vermischung dieser zweyen die grüne Farbe in den Pflanzen entstehen könne. Wenigstens sind die chymischen Versuche in diesem Stücke eben so gewiß als des Herrn Delavals Experiment, wo er mit einem Gran Eisenvitriol 10000 Granen Wasser die Farbe mittheilet.

Allein, beyde diese Erklärungen scheinen hypothetisch, und ohne hinreichenden Grund zu seyn, daß also meine wahre Meinung vorzutragen nicht überflüßig seyn wird.

Die Gefässe, wodurch die Nahrungs und Erhaltungssäfte in dem thierischen Körper zu den Gliedern geführt werden, sind von der Natur also geordnet, daß sie in einen Theil sehr reine, in die anderen aber dickere, und mehr vermischte Säfte nach Gestalt, und Größe ihres Baues bringen können, und müssen. Die Augenthränen sind hell, und weiß, wohingegen der Schweiß sich in einer ganz entgegengesetzten Qualität befindet. Also auch in den Pflanzen. Die Canäle, die zu den Blüthen, und Blumen gehen, müssen viel feinere Säfte zu denselben führen, als die sind, welche durch weitere Canäle zu den Blättern gebracht werden.

Zu den Blättern wird zwar auch die blaue, und rothe Farbe mit dem alcalischen Salze verbunden geführt, die in den Blüthen, Blumen, und Früchten enthalten sind, aber eine gelbe Farbe, welche an Feinheit der rothen und blauen der Blumen, und Blüthen nicht gleichkömmt, gehet in größerer Menge mit andern gröbern Theilen auf die Oberfläche, weil die größere Zuführungs-

canäle ſolche durchlaſſen. Folglich hat die Luftſäure zwar eben die Gewalt, wie bey den Blüthen, und Früchten, und befreyet das Farbeweſen von dem alcaliſchen Bande. Weil aber die gelbe mit der blauen in einem gewiſſen Verhältniſſe, und Miſchung ſtehet, werden uns ſolche beyde Farben in Geſtalt der Grünen vor Augen gelegt, und nachdem unter der gelben viel oder wenig von der blauen vermiſcht iſt, ſo iſt auch der Unterſchied der dunkeln oder lichtgrünen Farbe der Pflanzenblätter zu ſuchen.

Es entſtehet aber die grüne Farbe eben ſo wenig eher als bey den Blumen und Früchten, als bis die Luftſäure auf deren Oberfläche gewirket, und die Farben entwickelt hat. Alle Blätter der Bäume, und Pflanzen ſind bey ihrer Geburt weiß, oder aufs höchſte, wenn durch die Luftporen zu den eingeſchloſſenen Blättern eine Luftſäure gebracht wird, weißgelblicht. Vegetabilien, welche nicht an der Luft ſtehen, ſind auch nicht grün. Graß unter Steinen, oder andern Körpern, welche es etwann bedecken, iſt nicht grün, ſondern weiß, und wird erſt, nachdem die Luft auf ſie wirken kann, anfänglich gelb, und nach einer Zeit, wenn auch die blaue vom alcaliſchen Salze entwickelt, und mit der gelben vermiſchet worden, ſtellet es uns die grüne Farbe vor.

Die Natur hält ſich hier an die Geſetze in Hervorbringung der Farbe, wie man es bey den abgehauenen Hölzern bemerket. Ein friſch abgehauenes Holz iſt weiß, liegt es länger in der Luft, wird es gelb. Die gelbe Farbe, wie vorhin geſagt worden, verſchwindet, und nach einer Zeit kömmt eine blaulichte. Würde die gelbe von dem Holze durch die Witterung nicht geſchieden worden ſeyn, ſo würde bey Entſtehung der blaulichten ebenfalls das Holz bey dieſer beyden Vermiſchung grün ausſehen.

Wollen

Wollen wir der weitern Mühe uns nicht entziehen, und die Blätter bis in den ſpaten Herbſt verfolgen, nämlich die Zeit abwarten, da der Zufluß aus dem Stamme zu Ende gegangen, und die flüchtige blaue Farbe aus dem Stamme nicht mehr erſetzet wird, ſo werden wir bald die grüne in den Blättern vergehen, und die gelbe, oder ins Gelbe einſchlagende Farbe den Meiſter ſpielen ſehen. Alle Blätter ſind um dieſe Zeit gelb, oder kommen dem Gelben ſehr nahe. Die blaue Farbe hat ſich davon losgemacht, und iſt von der Sonne entweders verflüchtiget, oder in die gelbe verſchloſſen worden. Und dieſes gehet glaublich eben alſo zu, wie es zu geſchehen pflegt, wenn man blaugefärbte Seide mit der von mir aus gewiſſen Hölzern gezogenen gelben Farbe, heiß behandelt, wo die Seide anfänglich grün, alsdann aber, wenn ſie weiter in der gelben Farbe behandelt worden, eben ſo ſchön gelb wird, als wenn man es als weiß gefärbet hätte.

Doch iſt uns die Spur einer gegenwärtig geweſenen Blaue in den Blättern noch gar nicht entwichen; denn da zwar der Zufluß aus dem Stamme mit Zuführung der blauen Farbe zu Erhaltung der Grünen aufgehört, und die Miſchung zu Ende gegangen, ſo bleiben noch Merkmale in einigen Blättern, die ins Blaue oder Violette einſchlagen. Man betrachte nur im ſpaten Herbſte Kirſchen, Aepfel, und andere Blätter, ſo wird man von dieſer Wahrheit überzeuget ſeyn, und dieſe Farben nicht läugnen können.

Eben dieſe Beſchaffenheit hat es auch mit der grünen Farbe der Früchten. Wenn die Blüthe abgefallen, wohin aus dem Stamme durch die kleinen Saftadern der feinſte Saft mit dem proportionirten Farbeweſen abgeſchickt worden, und nach der Gattung viel oder wenig ſeine Farbe gewieſen, ſo wird gemächlich der

Stiel größer, und die Saftadern erweitern ſich, wodurch nicht ſo feine Säfte, wie zu den Blüthen, aber auch nicht ſo grobe, wie zu den Blättern mit dem Farbeweſen und alcaliſchen Salze kommen, und die Früchten ſo lange grün erhalten, bis bey Reifung die Farbe mit Beyhilfe der Luftſäure ſich ſichtbar entwickeln, und ſich roth, blau, oder violet nach der Gattung der Früchten unſern Augen darſtellen kann.

Die Wärme oder das Sonnenfeuer hat bey dieſem Naturſpiel in Färbung der Früchten in ſoweit ebenfalls ſeinen Einfluß, daß ſelbes die Poren eröffnen, und der Luftſäure ein tieferes Eindringen verſchaffen kann. Und daher kömmt es, daß jene Früchten, ſo gegen Mittag, und frey der Sonne ausgeſetzt ſind, viel gefärbter, als jene ausſehen, ſo in einem ſchattichten Orte unter Blättern, oder gegen Mitternacht hangen.

Ehe ich meiner Abhandlung ein Ende mache, muß ich noch einer Einwendung begegnen, die mir mit allem Rechte gemacht werden könnte, nämlich, wie es möglich ſey, daß einige Hölzer in ihrem Innerſten des Stammes z. B. Sevenbaum, Eiben, Zwetſchgen, u. ſ. w. ſtark gefärbt angetroffen werden, und wie die Luftſäure in ſolche dringen, und das Farbeweſen entwickeln können.

Ich könnte hier antworten, daß die Luft die Poren der Hölzer durchdringe, und die Luftſäure, welche mit ihrer Feinheit vieleicht zu dem alles durchdringenden philoſophiſchen Mercurialgeiſt in einer genauen Sippſchaft ſtehet, mit ſich einnehmen, in dem Holze das alcaliſche Salz ſättigen, und die Farben entwickeln könne.

Allein es scheinet mir in dieser Antwort ein gewisser Zwang zu herrschen, der der Natur und der Erfahrung widerspricht. Denn in diesen Umständen müßten nothwendiger Weise die äußeren Theile des Stammes unter der Rinde gefärbter, als die inneren gegen das Mark aussehen, weil die äußeren unter der Rinde am ersten von der Luftsäure müßten berühret und gefärbt werden, so aber just das Widerspiel ist; indem die gefärbten Hölzer nicht unter der Rinde, sondern allzeit bey dem Marke die stärkste Farbe haben. Ueberdas siehet man ganz deutlich, daß dem Eindringen der Luftsäure gewisse Schranken gesetzt sind, die sie nicht überschreiten kann, und sich nicht weiter als auf die Gegend der Rinde erstrecken. Also sehen wir, daß in den sehr jungen Zweigen der Bäume die äußere Rinde grün ist, und fast die Farbe der Blatter hat. Werden diese Zweige älter, so ist zwar die äußere Rinde nicht mehr grün, löset man aber diese ab, so wird man die nachkommende noch grün antreffen, als ein Zeichen, daß da eben sowohl, als bey den Blättern die gelbe, und blaue Farbe von der Luftsäure frey gemacht worden. Kömmt aber die Rinde an dem Stamme oder Aesten zu einer gewissen Dicke, so ist vergebens mehr eine grüne Farbe zu suchen, und zugleich hat die Wirkung der Luftsäure sein Ende erreichet.

Glaublicher also, und der Natur gemäßner ist es, daß die in den innern Theilen befindliche Farbe der Hölzer von dem Umlaufe der Säfte durch die Saftadern herrühre, und es mit solchen folgender massen zugehe.

Die Nahrungs- und Erhaltungssäfte führen das Farbewesen mit dem alcalischen Salze verbunden aus dem Stamme auf die Oberfläche der Blätter u. s. w. vermittelst der Saftadern. Allda

macht

macht die Luftſäure das Farbeweſen von ſeinen alcaliſchen Banden frey und los, wie wir es in den Blumen, Blüthen, und Blättern erſehen. Die Zurückführungsgefäſſe nehmen das losgemachte Farbeweſen, was nicht in die Luft verfliegt, zu ſich, und führen es wieder zurück in den Stamme. Dieſes ledig gemachte Farbeweſen leget ſich an die Holzfaſen an, und bringt nach und nach die Färbung der Hölzer zuwege.

Dieſe Meinung ſcheinet um deſto mehr gegründet zu ſeyn, als junge Bäume in ihrem Stamme nicht gefärbt ausſehen, da hingegen alte, wo ſchon viele Jahre der Umlauf der Säfte das aufgelöſte Farbeweſen zurück geführt, und den inneren Holzfaſen die Farbe mitgetheilet, recht dunkel gefärbt ſind. Auch iſt allzeit das Innere gegen das Mark zu in den alten Bäumen gefärbter, und wird ſtuffenweiſe, oder von Ring zu Ring, welche die Jahre und das Alter der Bäume anzeigen, an der Färbe gegen die Rinde zu ſchwächer, weil jenes gegen das Mark älter, und ſchon öfters von dem freyen zurückgeführten Farbeweſen durchkreuzet worden, als jenes gegen die Rinde.

Eben durch den Umlauf der Säfte kann erkläret werden, warum man aus der Potaſche einen vitrioliſirten Weinſtein (Tartarus vitriolatus) ſcheiden kann; denn da die Luftſäure mit dem alcaliſchen Salze ſich auf der Oberfläche der Pflanzen verbindet, ſo wird dieſes Mittelſalz durch die Venen zurück in den Stamme geführt. Wenigſtens ſcheinet es mir die gewißeſte Urſache zu ſeyn, daß auf ſolche Art der vitrioliſirte Weinſtein in die Potaſche gekommen ſey.

Da ich nun mit den Farben der Pflanzen zu Ende bin, und von deren Entstehung meine Gedanken eröffnet habe, so fällt mir ein, ob nicht ebenfalls zu glauben, daß die Luftsäure den durch die Lunge gehenden Chylus berühre, und also durch dieses die Röthe des Geblüts verursache. Wo zu die Wärme in dem thierischen Körper vieles beytragen kann. Sollte es hiedurch nicht eben so gut als durch das Acidum pingue des Herrn Mayers erkläret werden können? Vid. Dissert. de Calc. viv. Doct. Schaller Thes. 15.

Allein dieses ist ein Abwege, den ich nicht berühren will, weil ich mir nur von den Farben der Pflanzen zu reden vorgenommen habe. Doch kann ich nicht ungemeldet lassen, daß ich stark vermuthe, daß, gleichwie die Farben von der Luftsäure in den Pflanzen entwickelt werden, auch ein gleiches mit jenem Wesen geschehe, welches wir das Riechende nennen, und daß dieses eben sowohl wie die Farben von dem alcalischen Salze gebunden sey. Eine Blume giebt den Geruch von sich, bis sie verwelket; aus welchem ich schließe, daß die Luftsäure allzeit neue Geruchtheile, welche von dem Stamme, anstatt deren, die verfliegen, zugeführt werden, entwickelt, und die Geruchsnerven reizet, wodurch jene Empfindung entstehet, die wir den Geruch nennen.

Wenigstens glaube ich bemerkt zu haben, daß sehr altes, dürres, und nicht mehr riechendes Wachholder- und Sevenbaumholz wieder einen Geruch gegeben, und die noch versteckten riechenden Theile in Bewegung gesetzt worden, da ich solches mit Vitriolgeist bestrichen habe. Und da riechende Hölzer nnd andere Körper, wenn sie gerieben werden, mehr Geruch von sich geben, so scheinet dessen keine andere Ursache zu seyn, als daß durch die Wärme, die die Bewegung verursachet, die Poren eröffnet, der Luftsäure der Eingang gestattet, und das riechende Wesen durch solches befreyet werde.

Da ich bisher mit Erzählung meiner Verſuche, und aus ſolchen gezogenen Erklärungen der Pflanzenfarben umgegangen, ſo ſollte ich auch den Nutzen beſtimmen, der aus dieſer meiner Arbeit zu erwarten ſeyn möchte.

Allein ſolcher ſcheinet mir ſehr eingeſchränkt zu ſeyn. Doch vermuthe ich, daß, wenn man die Kunſt, Farben mit alcaliſchem Salze zu verbinden, wüßte, ſolche im Waſſer auflöſete, und mit dieſen alsdenn blumentragende Pflanzen begöße, die Blumengärtner verſchiedene Farben auf den Blumen erzeugen könnten. Und da von Lichtviolet bis zur Dunkelröthe, dann von Lichtgelb bis zur Bräune, ja wohl gar bis zur glänzenden Schwärze die Hölzer mit Farben überzogen werden können, ſo könnten die Tiſchler, und andere im Holze arbeitende Künſtler, und Handwerker, wo ſie mit Schattirungen ihrer Arbeit eine Zierde zu geben gedenken, daraus einen Vortheil ziehen, und ſolche Farben zu ihrem Gebrauche anwenden. Nur wäre dahin zu trachten, daß man ein Mittel erfände, die flüchtige rothe, und blaue Farben einiger Hölzer zu fixiren. Man kann nichts ſchöners von einer violeten Farbe ſehen, als wenn Quittenholz gehörig mit Vitriolgeiſt beſtrichen wird; aber es iſt dieſe Farbe nicht beſtändig, weil die Blaue nach und nach verflieget, und nur eine Blaßröthe zurück läßt. Auch iſt neben dieſem zu merken, daß, wenn man die Hölzer mit mineraliſchen ſauren Geiſtern zu färben gedenket, man junges Holz, oder wenigſtens von alten Stämmen das Aeußere gegen der Rinde nehmen müſſe, weil die inneren Theile des Stammes von dem Umlaufe der Säfte, wie vorhin gemeldet, in einigen alſo geändert werden, daß ſie den Wirkungen den ſauren Geiſter widerſtehen.

Ob weiters in diesen Versuchen der Vortheil, solche Farben hervorzubringen, stecke, die jenen, welche man aus fremden Ländern zu uns bringet, gleich kommen, oder selbe etwann gar übertreffen, will ich eben nicht bestimmen: doch glaube ich für gewiß, daß fernere Versuche nicht umsonst seyn würden; wenigstens habe ich die Möglichkeit gesehen, und jene gefärbten Seiden- und Wollenzeuge, so hier beyliegen, und allen bekannten gelben Farben an Glanze, Schönheit, und Beständigkeit gewiß gleich kommen, wenn sie selbe nicht gar übertreffen, können davon Zeugniß geben.

Diese Farben werden ohne Zusatz, ohne Beize oder andere Weitläuftigkeit erhalten. Es ist nichts anders nöthig, als daß man die mit mineralischen sauren Geistern zugerichtete Farbe im Wasser siede, und die Zeuge darinne siedend, oder nach den Umständen auch nur warm behandle.

Es ist gar nicht schwer, all jene gelbe Farben, die uns verschiedene gelbe Blumen weisen, so schön sie auch immer seyn mögen, auf Wollen- oder Seidenzeuge so fest und beständig anzubringen, daß weder Sonne noch Luft an solchen die mindeste Aenderung mache.

Ist aber dieses, wie es ganz gewiß ist, so kann die göttingische Gesellschaft der Wissenschaften für die im 1765sten Jahre aufgegebene Preisfrage, wenn es noch nicht geschehen, Genugthuung erhalten, da selbe eine gelbe Farbe, so dem Weid und Krappe an Beständigkeit gleichkömmt, verlangte.

Weil die gelbe Farbe zu Hervorbringung der grünen unumgänglich nothwendig ist, und ohne selbe kein Grün gemacht werden kann, auch die von mir gefundenen gelbfärbenden Materia-

lien in allem Ueberfluße zu erhalten ſind, folglich in dieſem Puncte alle fremde oder mühesam zuhabende Farbmaterialien entbehret werden können, ſo vermuthe ich, daß dieſe meine gemachten Verſuche einen Nutzen ſchaffen werden.

Zum Beſchluße muß ich noch anmerken, daß die Blumen, Blätter, Rinden, Früchten, und andere aus dem Vegetabilienreiche genommene Farbmaterialien nur darum den Stoff zur Färberey geben, weil in ſelben die Farbe von ihren alcaliſchen Feſſeln durch die Luftſäure entbunden worden. Dieſes entbundene Farbeweſen trift man in einigen Blumen ſo locker, und freyhangend an, daß, wenn man auf Papier ſolche trücknet, das Farbeweſen von der Blume abgeſöndert ſitzen bleibet.

Entdeckung

verſchiedener vegetabiliſchen

Farbmaterialien,

Seiden- und Wollenzeuge

ſchön und dauerhaft

gelb zu färben.

von

Mathias Brunnwiſer,

der

Philoſophie und Arzneykunſt Doctorn, und Stadtphyſikus

zu Kehlheim. 1771.

Die Farbmaterialien, die eine gelbe, beſonders aber gute, ſchöne, beſtändige, in der Luft und Sonne unveränderliche Farbe liefern, ſind meines Wiſſens eben nicht ſo zahlreich, als daß man nicht Urſache haben ſollte, mehrere zu wünſchen. Und daher glaube ich, daß gegenwärtige Entdeckung nicht gar ohne Nutzen ſeyn, und wo nicht vollkommen, doch reichlich die Zahl der gelben Farbſtoffen vermehren, und den etwann obwaltenden Mangel erſetzen werde.

Eine phyſiſche Betrachtung der friſch abgehauenen Hölzer, welche anfänglich weiß, nachdem ſie aber lange der Luft ausgeſetzt worden, auf der Oberfläche gelb, und nach dieſem blau- oder graulicht wurden, haben mich zur Entdeckung dieſer vegetabiliſchen Farben, und auch zugleich zu einer Abhandlung geführt, in welcher ich die grüne, rothe, blaue, und gelbe Farben der Blätter, Blüthen, Blumen, und Früchten der Vegetabilien zu erklären mich bemühet habe.

Da ich in dieſer Arbeit keine mir anſtändigen Vorgänger hatte, oder wenigſtens dergleichen mir nicht bekannt waren: und ich dennoch alle Hypotheſen vermeiden wollte; ſo habe ich allen Irrungen, und aus dieſen erfolgenden verdächtigen Schlüſſen vorzubeugen, pur allein auf ſolche Verſuche, und Erfahrungen mich geleget, welche zuverläßige gewiſſe Schlüſſe zu machen mich berechtigten.

Aus dieſen Verſuchen, und Erfahrungen habe ich erſehen, daß alle jene Farben, welche uns die Natur an den Vegetabilien zeiget, in dem Stamme unſichtbar ſchon verborgen liegen, und in der Oberfläche der Blätter, Blüthen und Blumen erſt entwickelt, und unſern Augen zur Bewunderung vorgeſtellet werden.

Durch dieſe Erfahrungen bin ich belehret worden, daß nur drey Farben, nämlich eine rothe, eine blaue, und eine gelbe all jenes Schönen Urſache ſind, das wir an den Vegetabilien bewundern. Und eben dieſe Erfahrungen haben mich auch überzeuget, daß die drey mineraliſchen ſauren Geiſter dieſe Farben, jedoch in einem ſolchen Unterſchiede hervorbringen, daß die Salpeterſäure mehr auf die gelbe, Vitriol, und Salzſäure aber mehr auf die blaue und rothe ihre wirkende Kräften beweiſen.

Dieſe Erſcheinungen alſo waren für mich genug, nicht allein meine Aufmerkſamkeit zu erregen, ſondern auch weitere Verſuche vorzunehmen, und wo möglich, mit dieſen einen ökonomiſchen Nutzen zu verſchaffen.

Da ich aber in der Folge ſah, daß die rothe und blaue Farben meinen Wünſchen widerſtunden, und ich ſolchen einen mit anſtändigen Grad der Fixität beyzubringen noch nicht genugſames Einſehen habe, folglich dieſe mit Vortheile in ihrer auf dem Holze erſcheinenden Schönheit und Vollkommenheit auf Seiden- oder

Wollen-

Wollenzeuge aufzutragen mich außer Stand befand: so habe ich solche wider meinen Willen verlassen, und in gegenwärtigen nur allein auf die Gelbe zu arbeiten mir angelegen seyn lassen müßen. Jedoch bin ich nicht ungeneigt, und fast entschlossen, bey ruhigeren Stunden, als gegenwärtige sind, und besserer Gelegenheit, auch auf die anderen zwo Farben meine weiteren Versuche um desto mehr zu richten, als diese, wenn sie fixiert, und in solcher Quantität, wie die gelbe, erhalten werden können, eben so gut den bekannten rothen, und blauen an Schönheit beykommen werden, als die gelbe mit den bekannten gelben um den Rang streitet.

Es bestehet aber die ganze Kunst die gelbe Farbe zu erhalten nur in dem, daß man die Hölzer von verschiedenen Bäumen, und Stauden mit Salpetersäure behandle, und mit dieser aus selben die verborgene Farbe ausziehe, oder vielmehr von ihren Banden, mit welchen sie in dem Holze gefesselt ist, erledige.

Damit ich aber dieses alles klärer, und begreiflicher mache, so will ich die Behandlungen, und Versuche selbst, wie ich solche in meiner Arbeit vorgenommen habe, erzählen.

Ich sammelte mir fast alle Hölzer von Stauden, und Bäumen, die in unserer Gegend wachsen: schnitt oder hobelte auf solchen eine Fläche, und erkundigte mich, wie diese, wenn sie mit Scheidewasser öfters überstrichen wurden, ihre Farbe zeigeten. Da diese Versuche mich schon vorhin einsehen ließen, welche Hölzer die mehreste, und schönste Farbe lieferen würden, so bin ich in meinen Versuchen weiter gegangen, und habe diese Hölzer entweder klein schneiden, hobeln, oder wohl gar raspeln lassen. Diese also zugerichteten Hölzer befeuchtete ich mit Scheidewasser, ließ es so lange stehen, bis ich glaubte, daß die sehr dünnen Späne

Das Weidenholz mit Scheidewasser auf bemeldte Art zugerichtet, giebt unter andern Hölzern, besonders auf die Seide die beste, und mit dem schönsten Glanze versehene Farbe: wie das Muster N. 1. zeiget. Und da dieser Baum an allen Flüssen, und feuchten Orten im Ueberfluße von selbsten wachset, und wenn er einmal in die Höhe gekommen, alle 3, oder 4 Jahre seiner Aeste ohne Schaden nicht allein beraubet, sondern auch mit leichter Mühe gepflanzet werden kann; so wäre dieses Farbmateriale allein hinlänglich, ganze Länder zu befriedigen, und den Abgang aller gelben Farbstoffen zu ersetzen.

Das Erdartischockenholz ist in dem ökonomischen Gebrauche noch weit unter der Weide: denn ungeachtet daß die Wurzel in der Küche zu einer, zwar nicht jedermann anständigen, Speise, oder etwann zur Mästung des Viehes zugerichtet werden kann, so ist jedoch der sechs bis zwölf Schuhe hoch wachsende dicke Stengel wegen Weiche des Holzes weder zum brennen, noch zu einem andern Gebrauche anzuwenden. Hingegen scheinet solcher desto tauglicher von der Natur zu den gelben Farben erzeuget worden zu seyn, wie das Nro. 9. beyliegende Muster beweiset. Man kann dieses Gewächse, welches auch im schlechten Grunde fortkömmt, mit geringen Kösten, und Mühe allenthalben nach Gutbefinden bauen.

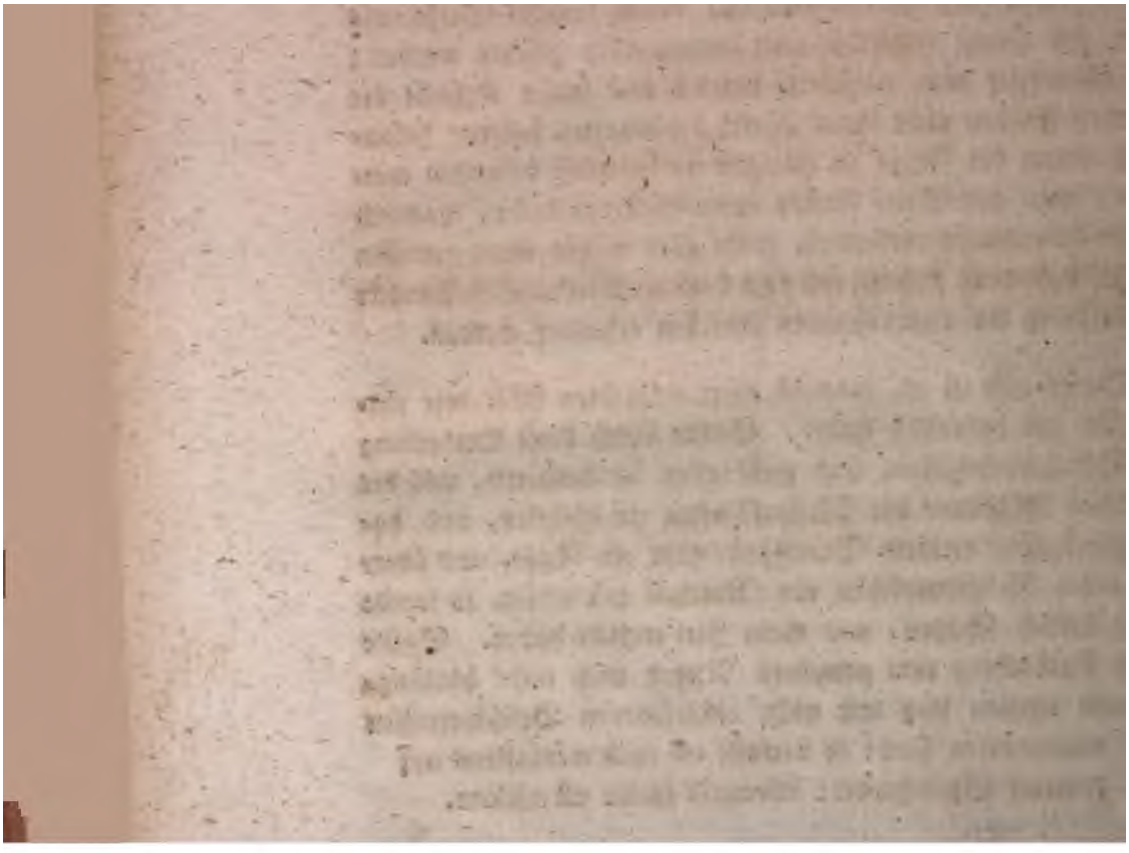
Nichts also, vermuthe ich, kann den Werth dieser neuen Farbstoffen geringschätzig machen, als etwann ein Vorurtheil, welches öfters ausländische Sachen nur darum höher schätzet, weil solche weit hergeholet werden müssen, und theurer sind, als jene, die uns die gütige Natur eben so gut in unserm Vaterlande darbietet.

Ich

Ich muß aber doch bekennen, daß dieſe auf ſolche Art gefärbten Zeuge mit einer alcaliſchen Lauge, wenn man ſolche darinnen waſchen, oder auch nur darein legen wollte, würden verdorben werden.

Allein, wenn man betrachtet, daß Seide, und Wolle in Lauge zu waſchen nicht gebräuchlich iſt, indem ſowohl Seide, als Wolle in der Lauge aufgelöſt und auseinander geſetzet werden; ſo kann ich weiter nicht einſehen, warum aus dieſer Urſache die angegebenen Farben nicht ihren Werth beybehalten ſollten: beſonders, da, wenn die Zeuge zu reinigen nothwendig befunden werden ſollte, man mit Seife ſolches bewerkſtelligen kann, wodurch die Farben keineswegs verdorben, wohl aber wegen einer gewiſſen dunklern Schattirung ſchöner, und nach dem verſchiedenen Geſchmacke oder Einbildung ein angenehmeres Anſehen erhalten werden.

Dieſes alſo iſt es, was ich einer erleuchten Akademie einzuſenden für gut befunden habe. Sollte durch dieſe Entdeckung meinem Durchleuchtigſten, und gnädigſten Landesherrn, und der churfürſtlichen Akademie der Wiſſenſchaften ein höchſtes, und hohes Wohlgefallen, meinem Vaterlande aber ein Nutze, und überhaupt meinem Nebenmenſchen ein Vortheil zuwachſen, ſo werde ich mich glücklich ſchätzen, und mein Ziel erreicht haben. Sollte aber dieſe Entdeckung zum gemeinen Nutzen noch nicht hinlänglich, ſondern einigen von mir nicht eingeſehenen Beſchwerniſſen etwann unterworfen ſeyn: ſo verlaſſe ich mich wenigſtens auf das gemeine Sprüchwort: Inventis facile eſt addere.



auch nützlichen Hölzern allein z. B. Quitten, Birn- und Apfelbäumen genommen werden müßten. Da aber solche auch neben diesen von schlechten, und verwerflichen Sachen, als abgeschnittenen Wein- und Hopfenreben, Schlehendorn, ausgewachsenen Spargelstauden, und anderen sonst unbrauchbaren Dingen bereitet werden können; so glaube ich, daß sie jederzeit Aufmerksamkeit und Schätzung verdienen.

In dem bremischen Magazin III. B. 48. Seite, wird eine gelbe Farbe aus Acaciablumen, Seide zu färben, vorgeschlagen: und Herr Denso in seinen Vorschlägen von Erfindung neuer Farbstoffen, welche im 5ten Stücke seiner monatlichen Beyträge zur Naturkunde befindlich sind, hat die gelbe Sunftlilie zur gelben Farbe angewandt, welche vor der ostindianischen gelben Farbe an Dauerhaftigkeit einen Vorzug haben soll.

Allein so gut, schön, und beständig auch diese Farben seyn mögen; so sind jedoch diese Farbstoffe nicht in solcher Quantität zu haben, welche etwan zum allgemeinen Gebrauche, und an allen Orten gewünschet werden möchten. Im Gegentheile aber, da meine Farbmaterialien in allen Gegenden, ohne Kösten, ohne grosse Mühe, und zugleich ohne Schaden gesammelt werden können; so werde ich zu entschuldigen seyn, wenn ich diesen vor jenen den Vorzug einräume.

Was aber noch betrachtungswürdiger zu seyn scheinet, so werden eben jene Hölzer, die am häufigsten wachsen, und zum hauswirthschaftlichen Gebrauche mit schlechter Achtung angesehen werden, öfters für die tauglichsten befunden, wovon das Felber- oder weiße Weidenholz (Salix vulg.) und die Staude von Erdartischocken (helianth.) zeugen.

Das Weidenholz mit Scheidewasser auf bemeldte Art zugerichtet, giebt unter andern Hölzern, besonders auf die Seide die beste, und mit dem schönsten Glanze versehene Farbe: wie das Muster N. 1. zeiget. Und da dieser Baum an allen Flüssen, und feuchten Orten im Ueberfluße von selbsten wachset, und wenn er einmal in die Höhe gekommen, alle 3, oder 4 Jahre seiner Aeste ohne Schaden nicht allein beraubet, sondern auch mit leichter Mühe gepflanzet werden kann; so wäre dieses Farbmateriale allein hinlänglich, ganze Länder zu befriedigen, und den Abgang aller gelben Farbstoffen zu ersetzen.

Das Erdartischockenholz ist in dem ökonomischen Gebrauche noch weit unter der Weide: denn ungeachtet daß die Wurzel in der Küche zu einer, zwar nicht jedermann anständigen, Speise, oder etwann zur Mästung des Viehes zugerichtet werden kann, so ist jedoch der sechs bis zwölf Schuhe hoch wachsende dicke Stengel wegen Weiche des Holzes weder zum brennen, noch zu einem andern Gebrauche anzuwenden. Hingegen scheinet solcher desto tauglicher von der Natur zu den gelben Farben erzeuget worden zu seyn, wie das Nro. 9. beyliegende Muster beweiset. Man kann dieses Gewächse, welches auch im schlechten Grunde fortkömmt, mit geringen Kösten, und Mühe allenthalben nach Gutbefinden bauen.

Nichts also, vermuthe ich, kann den Werth dieser neuen Farbstoffen geringschätzig machen, als etwann ein Vorurtheil, welches öfters ausländische Sachen nur darum höher schätzet, weil solche weit hergeholet werden müssen, und theurer sind, als jene, die uns die gütige Natur eben so gut in unserm Vaterlande darbietet.

Ich muß aber doch bekennen, daß dieſe auf ſolche Art gefärbten Zeuge mit einer alcaliſchen Lauge, wenn man ſolche darinnen waſchen, oder auch nur darein legen wollte, würden verdorben werden.

Allein, wenn man betrachtet, daß Seide, und Wolle in Lauge zu waſchen nicht gebräuchlich iſt, indem ſowohl Seide, als Wolle in der Lauge aufgelöſt und auseinander geſetzet werden; ſo kann ich weiter nicht einſehen, warum aus dieſer Urſache die angegebenen Farben nicht ihren Werth beybehalten ſollten: beſonders, da, wenn die Zeuge zu reinigen nothwendig befunden werden ſollte, man mit Seife ſolches bewerkſtelligen kann, wodurch die Farben keineswegs verdorben, wohl aber wegen einer gewiſſen dunklern Schattirung ſchöner, und nach dem verſchiedenen Geſchmacke oder Einbildung ein angenehmeres Anſehen erhalten werden.

Dieſes alſo iſt es, was ich einer erleuchten Akademie einzuſenden für gut befunden habe. Sollte durch dieſe Entdeckung meinem Durchleuchtigſten, und gnädigſten Landesherrn, und der churfürſtlichen Akademie der Wiſſenſchaften ein höchſtes, und hohes Wohlgefallen, meinem Vaterlande aber ein Nutze, und überhaupt meinem Nebenmenſchen ein Vortheil zuwachſen, ſo werde ich mich glücklich ſchätzen, und mein Ziel erreicht haben. Sollte aber dieſe Entdeckung zum gemeinen Nutzen noch nicht hinlänglich, ſondern einigen von mir nicht eingeſehenen Beſchwerniſſen etwann unterworfen ſeyn: ſo verlaſſe ich mich wenigſtens auf das gemeine Sprüchwort: Inventis facile eſt addere.

Ich habe die Pflicht, der churfürstl. Akademie eine philosophische Abhandlung vorzulegen, zu welcher mich nicht nur meine Neigung zu physikalischen Gegenständen, sondern vielmehr eine wahre Menschenliebe veranlasset hat. Ich wage es, derselben meine Gedanken, wie dem fast jährlichen von Austretzung unsrer nahmhaften Flüße verursachten Schaden nach den Naturgesetzen des Wassers zu steuren sey, zur Prüfung zu überreichen, und zugleich unsre schifreichen Wässer, forderst den mir so geliebten Innstromm, nicht als unsere Feinde, sondern als unsere wahren Freunde vorzustellen: wenn wir nur selbe als solche zu gebrauchen, uns von keinem Vorurtheile hindern lassen.

1. §.

Man muß das Wasser, indem es unsern zeitlichen Gütern so empfindlichen Schaden zufüget, doch immer für unsern besten

Freund ansehen, der aber unverhofft in so grosse Wuth versetzet wird, daß er die schädliche Wirkung derselben auszuhalten, sich nicht mehr im Stande befindet, eine Ausschweifung, die auch im gesellschaftlichen Leben oft eben jene dahin reißt, die die beste Gemüthsart besitzen. Man muß aber eben darum dem Wasser auf die Art, wie einem vom gähen Zorne zu sehr bewegten Freunde begegnen. 1tens, daß man den nahen Schaden abzuwenden suche. 2tens, daß man sich, wenn selber nicht mehr zu mäßigen ist, doch hievor sicher setze. 3tens, daß man nach dem Schaden alles in den alten Stand zu setzen sich bemühe, oder, die Anwendung zu machen, 1. daß man vor der Ergüßung eines Stroms an den Ufern Anstalt mache, die gähling eindringende Gewalt zu brechen. 2. die wirkliche und nicht zu hindernde Ergüßung unschädlich zu machen. 3. nach der Ergüßung den gemachten Schaden wieder zuersetzen.

2. §.

Ich rede hier nicht von der traurigen Naturerscheinung eines gähen Wolkenbruches, der seine durch lange Thäler reißende Wuth kaum nach Verheerung des freyen Landes endet. Ich gedenke nur den schädlichen Wirkungen der so gewöhnlichen und jährlichen Ueberschwemmungen nahmhafter Flüße, und Bäche zu steuren; und diese wollen wir nun in ihrer Ruhe betrachten, in einem Stande, wo sie sich uns nicht nur zur Ergötzung unserer Sinne, sondern auch zu aller Hülfe unsrer Nothdurft mit so getreuen Diensten, als immer die Naturgesetze von ihnen verlangen, täglich darbieten. In dieser Ruhe wollen wir sie betrachten, um ihre Unruhe, oder die Art ihrer Ausschweifungen kennen zu lernen. Wir werden unsere Wässer nirgends ruhiger sehen, als, wo sie Raum finden, sich ohne Einschränkung nach der Breite ergießen zu können. Da fließen sie so ruhig, das man fast zweifeln sollte, ob sie

ſich wohl bewegen: und leiten uns zugleich auf den Schluß, den der berühmte Naturforſcher Herr Buffon ſchon lange gemacht hat, daß je unmerklicher das Rinnſal des Waſſers von der Horizontallage abnimmt: und je weniger die Maſſe des abfließenden Waſſers eingeſchränket wird, deſto weniger wir von deſſen Bewegung zu fürchten haben: Bedingungen, wovon die erſte öfters, die letzte aber faſt allezeit durch unſern Fleiß erfüllet werden kann, und ſo kömt es nur darauf an, daß wir unterſuchen, was unſern Freund bey einer kleinen Bewegung zerſtreuen, und bey einer größern Ausſchweifung ſchwächen könne. Man mache alſo 1. einem Fluße, wo es ſich thun läßt, ein Flußbett, das von der Horizontallage nur ganz unmerklich abnimmt. 2. mache man ihm forderſt da, wo deſſen zu gäher Abfall, Lauf oder Zug nicht zu verändern iſt, oder, wo ihm das Ufer zu wenig Widerſtand machen kann, einen Raum, daß er ſich ausgießen könne. So werden wir wenigſtens bey der Rückſicht auf vorige Zeiten, auch nach ſehr groſſer Ueberſchwemmung uns nicht über viel gemachten Schaden zu beklagen haben.

3. §.

Da ich nicht zweifle, man werde den Vortheil des erſten Vorſchlags, nämlich des unbemerklichen Abhangs des Rinnſaals ohne Aufenthalt, einſehen; ſo förchte ich auch nicht, daß man wider den mit Fleiße gemachten Raum zu Ergüßung des Flußes gründliche Einwürfe beybringen werde. Kann ſich ein Waſſer ſo ergießen, daß es in Verhältniß des Hauptſtromms faſt ſtill ſtehe, ſo wird es auch, wenn es ſich ſchon über unſere Felder, und Wieſen ausbreiten ſollte, uns anders nicht ſchaden, als daß es 1. die Erde, die es bedeckt, aufweiche, und ſo flüßig mache, daß ſie mit der abnehmenden Fluth fortgeſchwemmt werde, oder 2. wo der Abfluß nicht iſt, den Boden, und die Frucht unter neu angeſchwemmte Erde begrabe. Die erſte Wirkung iſt zwar beträchtlich genug, weil ſie

Freund ansehen, der aber unverhoft in so grosse Wuth versetzet wird, daß er die schädliche Wirkung derselben auszuhalten, sich nicht mehr im Stande befindet, eine Ausschweifung, die auch im gesellschaftlichen Leben oft eben jene dahin reißt, die die beste Gemüthsart besitzen. Man muß aber eben darum dem Wasser auf die Art, wie einem vom gähen Zorne zu sehr bewegten Freunde begegnen. 1tens, daß man den nahen Schaden abzuwenden suche. 2tens, daß man sich, wenn selber nicht mehr zu mäßigen ist, doch hievor sicher setze. 3tens, daß man nach dem Schaden alles in den alten Stand zu setzen sich bemühe, oder, die Anwendung zu machen, 1. daß man vor der Ergüßung eines Stroms an den Ufern Anstalt mache, die gähling eindringende Gewalt zu brechen. 2. die wirkliche und nicht zu hindernde Ergüßung unschädlich zu machen. 3. nach der Ergüßung den gemachten Schaden wieder zuersetzen.

2. §.

Ich rede hier nicht von der traurigen Naturerscheinung eines gähen Wolkenbruches, der seine durch lange Thäler reißende Wuth kaum nach Verheerung des freyen Landes endet. Ich gedenke nur den schädlichen Wirkungen der so gewöhnlichen und jährlichen Ueberschwemmungen nahmhafter Flüße, und Bäche zu steuren; und diese wollen wir nun in ihrer Ruhe betrachten, in einem Stande, wo sie sich uns nicht nur zur Ergötzung unserer Sinne, sondern auch zu aller Hülfe unsrer Nothdurft mit so getreuen Diensten, als immer die Naturgesetze von ihnen verlangen, täglich darbieten. In dieser Ruhe wollen wir sie betrachten, um ihre Unruhe, oder die Art ihrer Ausschweifungen kennen zu lernen. Wir werden unsere Wässer nirgends ruhiger sehen, als, wo sie Raum finden, sich ohne Einschränkung nach der Breite ergießen zu können. Da fließen sie so ruhig, das man fast zweifeln sollte, ob sie

ſich wohl bewegen: und leiten uns zugleich auf den Schluß, den der berühmte Naturforſcher Herr Büffon ſchon lange gemacht hat, daß je unmerklicher das Rinnſal des Waſſers von der Horizontallage abnimmt: und je weniger die Maſſe des abfließenden Waſſers eingeſchränket wird, deſto weniger wir von deſſen Bewegung zu fürchten haben: Bedingungen, wovon die erſte öfters, die letzte aber faſt allezeit durch unſern Fleiß erfüllet werden kann, und ſo kömt es nur darauf an, daß wir unterſuchen, was unſern Freund bey einer kleinen Bewegung zerſtreuen, und bey einer größern Ausſchweifung ſchwächen könne. Man mache alſo 1. einem Fluße, wo es ſich thun läßt, ein Flußbett, das von der Horizontallage nur ganz unmerklich abnimmt. 2. mache man ihm forderſt da, wo deſſen zu gäher Abfall, Lauf oder Zug nicht zu verändern iſt, oder, wo ihm das Ufer zu wenig Widerſtand machen kann, einen Raum, daß er ſich ausgießen könne. So werden wir wenigſtens bey der Rückſicht auf vorige Zeiten, auch nach ſehr groſſer Ueberſchwemmung uns nicht über viel gemachten Schaden zu beklagen haben.

3. §.

Da ich nicht zweifle, man werde den Vortheil des erſten Vorſchlags, nämlich des unbemerklichen Abhangs des Rinnſaals ohne Aufenthalt, einſehen; ſo förchte ich auch nicht, daß man wider den mit Fleiße gemachten Raum zu Ergüßung des Flußes gründliche Einwürfe beybringen werde. Kann ſich ein Waſſer ſo ergießen, daß es in Verhältniß des Hauptſtromms faſt ſtill ſtehe, ſo wird es auch, wenn es ſich ſchon über unſere Felder, und Wieſen ausbreiten ſollte, uns anders nicht ſchaden, als daß es 1. die Erde, die es bedeckt, aufweiche, und ſo flüßig mache, daß ſie mit der abnehmenden Fluth fortgeſchwemmt werde, oder 2. wo der Abfluß nicht iſt, den Boden, und die Frucht unter neu angeſchwemmte Erde begrabe. Die erſte Wirkung iſt zwar beträchtlich genug, weil ſie

die Urſache iſt, warum wir erfahren, daß man erſt, nachdem das Waſſer abfließt, und ſich mindert, zum meiſten über den Raub der Feldfrüchte, und über den wirklich, oder doch nahen Einſturz der Gebäude und Häuſer zu klagen hat, indem wenn das Waſſer zu fließen anfängt, ſelbes nicht nur alles, was darauf ſchwimmen kann, ſondern auch, was ſich von ſelbem faſt bis zur Vermiſchung bewegen läßt, nämlich die auf Feldern, oder an- und unter den Gebäuden aufgeweichte Erde mit ſich fortzunehmen pfleget. Aber, nebſt der Hülfe, die ich zur Verſicherung der Gründe bald vorſchlagen werde (§. 10. — 13.) da wir den Raum der Ergüßung ſelbſt vorbereiten, können wir ihn nicht ſo zurichten, wie es uns ſelbſt zum beſten gedünkt, den nahen Schaden abzuwenden? Laſſet uns alſo den Platz, den wir der Ergüßung des Stromms wiedmen, am Ufer ſo verſchanzen, das ſelber nur bey gar groſſer Ueberſchwemmung mit der ganzen Gewalt der Flnth übergoſſen werden könne. Laßt uns 2. in dieſem aufgeworfenen Ufer dem an- und ablaufenden Waſſer nur eine, oder die andere enge Oeffnung machen, damit die Ausgüßung nicht mit Gewalt eindringe, ſondern nur ſanft einſchleiche. Laßt uns 3. dieſe Oeffnungen alſo mit Geſträuchen verlegen, daß faſt nichts, als das Waſſer durchfließe, ſo wird uns auch bey dem Ablaufe von Frucht, und Erde das meiſte zurückbleiben.

4. §.

Haben wir nun Mittel, die angeführte erſte Wirkung, nämlich den Raub der Früchte, und Erde faſt unſchädlich zu machen, ſo dürfen wir uns vor der zweyten, nämlich vor der Bedeckung mit Schlamm, oder neuen Erde ſoviel minder fürchten, als wir ſelbe vielmehr als höchſt nützlich erfahren können. Es iſt freylich ein trauriger Anblick, wenn wir ganze Felder, und Wieſen im Waſ-

ſer,

ſer, und nach deſſen Ablauf im Schlamme ſtehen ſehen. Aber es braucht nur eine wenige Ueberlegung, ſo werden wir uns vor einer ſo ſtillen Ueberſchwemmung nicht mehr entſetzen, als die Egypter bey dem Austritte ihres Nilflußes, weil wir ſicher ſind, daß ſie uns bey dem Ablauf nichts nehmen kann (§. 3.) wohl aber den fetteſten Dung für unſere Felder, und Wieſen uns hinterlaſſen muß. Es wäre überflüßig, einem Landwirth den von einer ſtillen Ueberſchwemmung hinterlaſſenen Schlamm als eine gute Koſt der Felder, und Wieſen anzurühmen, weil ich ihm doch nichts neues erzählen würde: es wird aber nicht umſonſt ſeyn, manchen zu erinnern, daß er ſich eben darum mit ſolchem, ihm ſo bekannten nützlichen Abtrag ſeines benachbarten Stromms ab den ſeltnen Schaden einer ſanften Ueberſchwemmung faſt jederzeit wird getröſten können, wenn er ſich der vorgeſchlagenen Vorſorge bedienet, einen wüthenden Fluß durch eine Ergüßung in die Ebne zu zerſtreuen: dieſe Ergüßung aber ſo ſanft, und ſtill zu machen, daß er nur darum, weil er eine von uns nach unſerm Gutgedünken gemachte Oeffnung findet, oder weil er wegen gar zu viel angehäuften Waſſer übergeht, ſich auf unſre Flächen ergießen muß (§. 3.)

5. §.

Und ſo haben wir dann das erſte Mittel, uns vor den gewöhnlichen, bald mehr, bald mindern Ueberſchwemmungen eines ordentlich fließenden Flußes, oder Bachs zu verſichern; nämlich deſſen Wuth zu zerſtreuen, oder zu machen, daß ein angeſchwemmter Fluß ſich auf eine Ebne ergießen könne: ein Mittel, 1. das in ſeiner Wirkung gewiß iſt, weil ein ſo zerſtreuter Stromm niemals mit ſolcher Gewalt laufen, und reißen wird, als einer, der eine gäh angehäufte übergroſſe Waſſermenge durch nahe Ufer, und über ein zu ſehr geſenktes Flußbett ausgießen muß. 2.

ein

ein Mittel, das selbst, wo alles unter Wasser gesetzt wird, gar nicht, oder nur zufällig schaden wird, und endlich 3. ein Mittel, das mit dem angeschwemmten Dung ein anders Jahr den gemachten Schaden genug ersetzen wird.

6. §.

Wir haben aber so wenig Ursache, mit diesem Mittel allein uns zu begnügen, als man die Wuth der Flüße nicht nur zu zerstreuen hat, sondern auch, wo dieses nicht hilft, solche unkräftig, und unwirksam zu machen. Wir müssen uns erinnern, daß grosse Wässer, wo sie eingeschränkt schnell laufen, gewiß reißend werden, und allenthalben untergraben; so, daß ganze Striche des Ufers einstürzen, ehe die Fluth so hoch gestiegen, daß sie sich über selbe hätte ergießen, und zerstreuen sollen. Wir müssen die Vorsorge haben, ihn von dem Gegenstande seines Zorns so weit, und mit so starkem Widerstande zu entfernen, daß er sich daran die Hörner zerstossen, oder doch ohne Schaden wüthen muß. Nun hat man freylich schon vor tausend Jahren zu diesem Absehen kostbare Dämme erbauet, die lebendige Kraft des Wassers nach beliebigen Orten zu wenden: oder sogenannte Schlächten, die Ufer vor dem Reißen und Untergraben des Stromms zu versichern. Wie wenig aber so lange Zeit bey allen noch so grossen Kosten, Wissenschaft, und Erfahrung von dergleichen Bau was standhaftes geliefert worden, ist so traurig, als oft zu sehen. Was ist zu thun? Wir müssen der Ueberschwemmung Widerstände setzen, die sowohl das Reißen, als das Untergraben derselben verhindern. Zwar, was das Reißen anbelangt, kann, sich die Kunst mit ihren Werkzeugen, nämlich den Schlächten, oder Wehren auch den größten Wassergüßen so entgegen stellen, daß kein noch so grosser, und noch so wüthender Stromm eine Spur des Schadens nach sich lassen kann. Gewiß, so groß der Anfall des Wassers immer ist, wird er doch

keine

keine Schlächte oder Wehren, so man bey unsern Zeiten setzt, schadhaft machen. Aber, wie steht es mit dem Untergraben? ist nicht dieses die Ursache, daß man nach abnehmendem Wasser von den schönsten Wassergebäuden nichts, als die bis auf den Grund entblößten Bäume findet, die, wenn es noch nicht geschehen, alle Augenblicke den Einsturz der auf sie gelegten noch übrigen Holzmenge drohen? und, wie ist dieser schädlichen Wirkung des Untergrabens vorzubauen?

7. §.

Wir müssen die Wirkung kennen, ehe wir solche unkräftig machen wollen: wir müssen wissen, was Untergraben sey, und wie es geschehe? Hierzu müssen wir uns erinnern, daß die Haupteigenschaften des Wassers sind 1. die Schwere: 2. die Flüßigkeit: 3. die Feinheit seiner Theilchen. Durch die erste Kraft ist es in steter Bemühung, nach der Perpendikular fortzuschreiten: durch die zweyte wendet es diese Bemühung auf die Seite an: durch die dritte ist es zum meisten aufgelegt, nach den Gesetzen der Anziehung zu wirken, oder zu leiden: uud hiemit durchdringet es den meisten Widerstand wenigstens einige Linien tief. Nichts widersteht ihm minder, als, was Erde heißet: sollte diese auch schon so fest zusammengebacken seyn, daß sie fast den Name eines Steins verdiente. Gewiß: ein noch so fest geschlagner Thon wird auch von dem stillesten Wasser angegriffen; man darf nur solches durch einen Ablauf in Bewegung bringen, so wird man diese natürliche Wahrheit bald mehr, als man verlangen sollte, bestättiget finden. Es ist also das Untergraben des Wassers anders nichts, als daß selbes durch was immer für Naturgesetze die Erdtheilchen von ihren Banden, die sie vereiniget halten, auflöse, mit sich vermische, und so mit sich vermischet fortführe, und diese allenthalben, wo es

nur hinkömmt, aufweichen, und dann abfließen könne: ſo, daß es von einem Waſſerbau, wenn es einmal eindringen kann, alles, was nur Erde heißt, untergräbt, oder mit ſich fortſchwemmt, folglich alles, was auf der Erde geruhet, dem gewiſſen Einſturze ausgeſetzet, hinterläßt.

8. §.

Heißt nun dieſes Untergraben, ſo giebt uns die Vernunft, daß wir dem Waſſer, wo es ſich außerordentlich bewegen muß, ja nur keine Erde entgegen ſetzen dürfen, ein Geſetz, ſo von denen, die dermalen einen Waſſerbau führen, ſo wenig beobachtet, und ſo oft vernachläßiget wird, daß man faſt zweifeln ſollte, ob ihnen ſolches jemals ſey bekannt worden. Man beſehe nur den Bau unſerer ſogenannten Schlächten, die das Geſtad vor der Gewalt des reißenden Waſſers beſchützen ſollten. Wir machen ſolche darum, weil wir unſre Ufer wegen vieler Erde für zu ſchwach halten, dem Waſſer zu widerſtehen, und gebrauchen hierzu meiſtentheils eben das, was dem Waſſer nicht widerſtehen kann, nämlich Erde. Aus wem beſtehen denn unſere Schlächte? 1. aus Bauhölzern, die nach Gutgedünken entweder nach einem rechten, oder nach einem ſchiefen Winkel tief in den Grund getrieben werden. 2. Aus Bauhölzern, die nach der Quere mit jenen verbunden werden. 3. meiſtentheils aus Büſchen von kleinem Holzwerk, oder ſogenannten Faſchinen, die mit Erde allenthalben unterlegt, belegt, und ausgefüllt werden, ſo, daß noch die Erde recht feſt eingeſtoſſen wird; in der Abſicht zwar, daß ſolche dem eindringenden Waſſer deſtomehr widerſtehen ſollte: mit der Folge aber, daß wir ihm eben hiemit deſto mehr ſchwachen Widerſtand entgegen ſetzen, weil wir ihm Erde entgegen ſetzen.

9. §.

9. §.

Selbſt die Eckſteine unſers Gebäudes, ſollen wir ſie mit Furcht, oder mit Hoffnung betrachten? wir treiben einen Stamm-Holz, der, damit er ohne Widerſtand durchdringen könne, ſogar mit einer eiſernen Spitze, oder ſogenannten Schuhe bewaffnet iſt, in den Grund: und trennen hiemit die Erde mit einem Mittel, mit dem ſie ſich niemals ſo, als mit ſich ſelbſten, oder mit Steinen verbinden kann: nämlich mit einem Holz. Wir machen alſo dem Waſſer eine Stelle, da ſelbes nach ſeinen Naturgeſetzen eindringen, oder untergraben muß, wenn es ſich mit Bewegung aufhalten kann (§. 7.) und daß es ſich aufhalten, und mit Aufwallung bewegen müſſe, macht eben dieſes dem Lauf entgegengeſetzte Holz. Was folget? als, 1. daß ſich das Waſſer zwiſchen Holz, und Erde, weil hier keine Verbindung iſt, immer tiefer ſenke: daß es 2. immer tiefer die Erde auflöſe, und wegen ſteter Bewegung auf die Höhe treibe: daß es 3. die aufgelöſte und aufgetriebene Erde wegen der Bewegung mit ſich fortführe: und daß es hiemit 4. ſogar den Eckſtein unſers Gebäudes, den ſo tief getriebnen Baum, manchesmal bis unter die eiſerne Spitze entblöſſet hinterlaſſe. Trauriger Anblick, wenn wir nach der Ueberſchwemmung ſehen müſſen, daß uns die Güße mehr Land von dem Ufer fortgeriſſen, als wir mit groſſer Mühe, und Koſten erhalten wollten: aber auch traurige Erinnerung für einen Naturforſcher, und Menſchenfreund, wenn er ſiehet, daß man nur überlege, was das Waſſer gethan, und nicht, was es nach ſeinen Naturgeſetzen habe thun müſſen: und daß man folglich in Zukunft dem Schaden nicht beſſer, als bisher geſchehen iſt, vorbeugen werde!

10. §.

Wir dürfen alſo, die Erde unſers Ufers zu erhalten, den Ausſchweifungen des Waſſers keine Erde entgegenſetzen: aber, was ſonſt? Wo man keine Koſten ſparren darf, wird wohl mancher zuerſt auf ein von gehauenen, und gut verbundenen Steinen aufgemauertes Werk denken. Allein, ſo gerne ich ſehe, daß man mit gemauerten Dämmen ein ſtehendes Waſſer, als etwann einen groſſen Fiſchteuch einhalte, ſo ungern wollte ich ſolches an einem groſſen Fluße anlegen, weil alles Mauerwerk, ſobald Grund, oder Verbindung merklichen Schaden leidet, ſich gewiß trennen muß, und ein fließendes Waſſer, und noch mehr ein reiſſendes im Grund, und an der Verbindung gewiß eine Aenderung machen wird. Ich wollte alſo vielmehr die von ſtarken Holzſtämmen zuſammengefügten, und in den Grund des Waſſers nicht eingeſchlagenen, ſondern eingeſenkten Waſſerkäſten empfehlen: die ich eben den Waſſerbauverſtändigen um ſo weniger zu beſchreiben habe, als ſie ſelbe ſo oftmals gebrauchen, daß ſie bey ungewiſſem Flußbette ſogar ganze gemauerte Brücken-Jöcher auf dergleichen eingeſenkten, und mit Steinen angefüllten Waſſerkäſten aufführen dürfen. Man gebrauche ſich nun dergleichen Bauart ſo, daß man ganze Strecken des ſchwachen Ufers anſtatt der Schlächte mit dergleichen ſo zuſammengefügten hölzernen Wänden, als die Wände eines Waſſerkaſtens ſind, bedecke, und den Raum zwiſchen der Wand, und dem Ufer mit ſogenannten Schotter, oder kleinen Steinen ohne Erde anfülle, ſo wird die Ausgüßung weder bey der wirklichen Ueberſchwemmung, noch bey dem Abzuge, oder Fallen des Waſſers mehr ſchaden, als ein Dieb, der nichts hat rauben können, und doch die Oeffnung hinterlaſſen hat, wo er eingeſchloffen war, zugleich aber den Vortheil entdecket, daß man ſich vor künftigem Anfalle deſtomehr verſichern könne.

11. §.

II. §.

Ich muß von meinem Vorschlage mehrere Rechenschaft geben. Stellen wir uns ein Ufer vor, das anstatt der gewöhnlichen Schlächte, eine so hölzerne Mauer, als eines Wasserkastens, vor sich hat: was wird hier auch die größte Ueberschwemmung für eine Veränderung machen? Entweder muß sie uns schaden 1. mit Uebergüßung, oder 2. mit Gewalt des reißenden Stromms, oder 3. mit dem so schädlichen Untergraben. Die Uebergüßung kann uns, wenn wir wollen, wenig schaden, aber viel nutzen (§. 4. 5.) und muß sie uns auch zufälliger Weise schaden, weil sie zu ungelegener Zeit kömmt, so ist doch der Schaden nicht so groß, als wenn wir ganze Strecken von unsrer baubaren Erde verlieren. Die Gewalt, ich verstehe unter diesem Worte Stoß, oder Druck, diese Gewalt, wenn nur das Wasser allein stößt, oder drückt, wird einem solchen Widerstande in so kurzer Zeit, als unsere Ueberschwemmungen dauren, wohl wenig abgewinnen können. All anderer Druck und Stösse sind zufällig, und können mittels Vorsehung, wovon ich eine Weise noch in dieser Abhandlung vorschlagen werde, (§. 14.) meistentheils verhindert werden. Das Wasser allein kann an dieser Art von Schlächten nichts, als aufwallen, und vorbeyfließen, ohne ein Stückchen davon abzustossen. Aber wird selbes nicht wenigst an den Ecken unsers Wasserkastens anstossen, aufwallen, und also untergraben? (§. 7. — 9.) es wird anstossen, es wird aufwallen, es wird auch untergraben; aber wie wenig, da selbes keine Erde, keinen getrennten Boden, wo es eingreiffen könnte, vor sich hat? (§. 9.) Das durch die Wände selbst eindringende Wasser findet keine Erde, die es mit sich fortschwemmen konnte, (§. 10.) und Steine können nicht folgen, weil die Ritzen zu enge sind. Das an dem Fuß dieses Kastens aufwallende Wasser wird nur so wenig heben, daß die nachsinkenden Steinschutte alles gleich wieder an-

füllen kann, mit einer Leerung des Kaſtens, die oben mit neuer Anſchütt leicht zuerſetzen iſt. Von der auf dieſe Art erbauten Wehre, kann nicht das mindeſte getrennt werden: ſie wird immer ſtehen bleiben, wenn auch die ganze Füllung nachſinken ſollte. Was iſt nun leichter, eine ganz neue Wehre zu erbauen, oder einen ſolchen Waſſerkaſten nach der Ueberſchwemmung mit neuen Schotter auszufüllen? und zwar nur nach einem, oder dem anderen Waſſerguſſe; weil endlich das Waſſer ſelbſt mit wiederhollter Anſchüttung ſein Flußbett an dergleichen Wände anlegen wird.

12. §.

Nun kann man freylich einen ſolchen Waſſerkaſten nicht wohlfeil erkaufen. Allein wie theuer kömmt uns wohl der Bau einer zwey, bis dreymal immer koſtbarer aufgeführten Schlächte, ohne auch den Schaden der fortgeriſſenen Stücke unſers Ufers anzurechnen? Doch, laſſen wir auch ſolche koſtbare, aber niemals genug zubezahlende Vorſorge reichen Landwirthen, oder gar Landesherren über. Es giebt noch wohlfeilere Mittel zu unſerer Verſicherung, die nichts, als die Geduld in theuren Werth ſetzet; weil wir hier nicht ſelbſt arbeiten, ſondern nur Handlanger der Natur machen, die, wenn man ihr folget, ſichere und ſchöne Werke darſtellet, auf ihren Wegen aber ungemein langſam fortſchreitet. Setzen wir vor das Ufer, an dem ſich der überfließende Strom mit dem ganzen Leben ſeiner Kraft reibet, einen Aufenthalt, der ſelbem immer ſoviel umſonſt abnimmt, als uns zu einer ganz natürlichen Schlächte, oder Wehre vonnöthen iſt. Es iſt möglich; denn, ſo räuberiſch, als das Waſſer insgemein, forderſt das Flußwaſſer iſt, ſo hat es doch den Ruhm noch nicht verlohren, daß es zwar raube, von dem Geraubten aber nichts für ſich behalte, ſondern alles

wieder

wieder gebe, was es genommen; nur daß es nicht an dem Ort geschieht, wo der der Raub geschehen ist: sondern da, wo es selben zwischen einer Lage grosser Steine muß liegen lassen; denn da wird es seinen Raub solange ablegen, bis es sich selbst ein neues Flußbett machet, welches selbes niemals aufheben, wohl aber immer bedecken wird. Man untersuche nur den Grund unserer Flüße: meistentheils wird er aus grossen, mit Sand, und Schotter ausgefüllten Steinlagen bestehen.

13. §.

Eine solche Steinlage nun vor unser Ufer zu setzen, kostet freylich viele Mühe, und Fleiß, aber wenig Geld. Ich will hierzu nur einen und den anderen Vorschlag machen: und ich zweifle nicht, es werden jene, die nach solchem ohne Vorurtheil arbeiten, und nachdenken wollen, noch weit tauglichere Mittel zu ihrer Absicht entdecken. Man nehme ein grosses, etwann wegen Alter sonst unbrauchbares Schiff, so wie man zu unseren Salz- und Getraidzügen gebraucht: man lege solches bey seichtem Wasser an das Ufer, das sich vor Ueberschwemmungen fürchten muß, nach einem zu unserm Vorhaben tauglichen Winkel: man beschwere solches Schiff mit irregularen grossen Steinen, so, daß das Wasser bey der Ergüßung Platz finde, seinen Raub abzusetzen: man lege dergleichen Steine, mit Stöcken von gefällten grossen Bäumen vermischt, um solch eingesenktes Schiff herum, und man wird auch schon nach einem Jahre sehen, was das Wasser stlbst beytrage, eine natürlich dauerhafte Wehre vor das Ufer zu setzen. Die Kosten noch mehr zu erspaeen, wird erklecklich seyn, vor das Ufer nur eine grosse Lage der mit vielen verwirrten Wurzeln versehenen Stöcken, von abgehauenen Eich- oder anderen grossen Bäumen anzulegen, und solche mit grossen, zum Theil mit eisernen Klammen zusammengehefteten Steinen

zu verſetzen, und endlich alles dem Waſſer zu überlaſſen. Die Zeit wird die Mühe wohl belohnen, und dieſe wird theils ſelbſt nicht ſo beſchwerlich ausfallen, theils noch vortheilhaftere Unternehmungen an die Hand geben, wenn wir nur die Hand ohne Vorurtheile an das Werk legen. Ueberdas wird es auch nicht ſchaden, das noch übrige Ufer nebſt dieſer Vorſorge auch auf andere Art ſtandhaft zu machen, und mit geſteckten Weiden, oder Felbern, und andern dergleichen die Erde anhaltenden Gewächſen zu verſehen: die uns auch, wann wir ſie ſo fleißig ziehen, daß wir ſie zu lebendigen Zäunen einflechten können, vor einem ſchädlichen An- und Ablauf der Fluth deſto ſicherer, und bequemer dienen werden. (§. 3.)

14. §.

Mit ſolcher Vorſicht haben wir freylich groſſe Hoffnung, den natürlichen Anfall unſerer gewöhnlichen Ueberſchwemmungen unſchädlich, ja wohl gar mit der Zeit nützlich zu machen, (§. 12. 13.) aber es iſt hiemit die Furcht vor dem zufälligen Schaden noch nicht gehoben; weil wir nicht wiſſen, was der in Wuth geſetzte Fluß für Gegenſtände finden und zum größten Nachtheile auf uns zuſtoſſen könnte. Allein, laßt uns nachdenken, was für ſchadhafte Werkzeuge ein ſich ergießender Fluß antreffen möchte, ſo werden wir ſolche bald kennen lernen, und erfahren, daß ſelbe nur groſſe Raubſtücke ſind, die der Räuber nicht ins Kleine bringen kann: als etwann untergrabene, und nach dem Falle fortgeriſſene bejahrte Bäume oder hölzerne Häuſer, und bey der Eisfluth ſchwere, und groſſe Stücke des ſogenannten Grundeiſes; denn dieſe ſind es, die mit einer ſo groſſen Schwere als die Geſchwindigkeit eines groſſen reißenden Flußes iſt, an die Ecken der Dämme, und Jöcher der Brücken angetrieben werden, oder, wo ſie ſich ſetzen, ſelbſt

ihren

ihren Führer trotzen, und dem Stromme anweisen, wohin er mit seiner Gewalt zum heftigsten stossen soll. Welch fürchterliche Waffen! aber wie leicht kann man diese unserm wüthenden Freunde aus den Händen reißen? arme Fischer, und dem Fluß nahe arme Landleute wagen sich auch mit Lebensgefahr dem Räuber die Beute abzujagen, oder das bey einer Ergüssung hergeschwemmte Bauholz aufzufangen: und weisen uns zugleich, daß man einem wüthenden Fluße seine zufälliger Weise in die Hände gespielten Waffen auf die leichteste Weise abnehmen könne.

15. §.

Es kömmt also darauf an, daß man 1. wo das Wasser nicht zu hoch ist, forderst bey den Brücken eine Vorkehrung mache, daß sich von dem hergeschwemmten nichts anlege, sondern alles, was man sonst nicht auffangen kann, ohne Schaden durch die Brücke durchfließe. 2. Daß man, wenn das Wasser selbst die Brücke übersteigt, jene fürchterlichen Mauerbrecher, die so erstaunliche grosse Lasten hergeschwemmter ganzer, oder gefällter Bäume, und dergleichen von der Brücke, oder wo sie sich immer an das Ufer schädlich anlegen, oder Schaden drohen, noch ehe sie stossen, oder sich setzen, weg und auf die Seite leite, und ganz, oder zerstückt an das Land ziehe. Mit solcher Vorsorge werden wir dann nichts als Wasser zu fürchten haben, dessen einzelne Gewalt wir so gut kennen, (§. 11.) und so leicht unkräftig zu machen wissen. (§. 10.— 13.) Wer wird aber solche Vorsorge machen, betreiben, und ausführen? Wenn sie nicht eine landesherrliche Verordnung macht, betreibet und ausführt, wird wohl nichts, oder nur was weniges, und dieses nur zufälliger Weise geschehen.

16. §.

Nun hat dann unser Freund ausgewüthet: er blickt uns wiederum mit befriedigter Mine entgegen. Unser Fluß geht über

ein ſchmales Flußbett in einer reizenden Stille. Aber iſt uns hiemit geholfen? welch ſchmerzlichen Anblick bieten uns unſre abgeriſſenen oder überſchlämmten Ufer, unſre untergrabenen und ausgeſchwemmten Wehren, und Schlächte dar? Selbſt das ganz veränderte Rinnſaal unſers Flußes macht es uns nicht wünſchen, daß er ſeinen alten Lauf hätte behalten mögen? aber laßt uns nur auch an dem Ende nicht vergeſſen, daß wir mit einem wahren Freunde zu thun haben, der gewiß jederzeit fertig ſtehet, den Schaden zu erſetzen, wenn man ihm nur hierzu Hülfe, und Leitung giebet. Vor allem wird er (welches eben, alles in vorigen Stand zu ſetzen, das Vortreflichſte und Vorzüglichſte iſt) das vorige Flußbett gar gern annehmen, wenn man ihm nur hülft, daß er ſolches ſuchen könne. Hier verlange ich freylich was groſſes, was ungewöhnliches, und vieleicht gar was ungerechtes. Es iſt wahr, einen groſſen Fluß, nachdem er ausgetretten, wieder an das vorige Ufer zu bringen, iſt was ungewöhnliches; aber, daß ein Bach, nachdem er ausgeriſſen, etwann von einem Müller gezwungen werde, das alte Rinnſaal zu nehmen, iſt was gar gewöhnliches, weil nämlich dieſer auf thätige Mittel denket, wo andere ſich nur mit Klagen aufhalten, daß ſie der Stromm verlaſſen, nicht aber gedenken, viel minder ſich bemühen, ob, und wie ſie ſolchen wieder zu ſich leiten möchten.

17. §.

Man muthmaſſe hier nicht, als ob ich nicht einſehe, welch ein Verhältniß die Mühe, einen ellenbreiten Bach in ſeinen alten Graben zu ſchließen, zu jener habe, einen etlich Ruthen breiten ſchiffreichen Fluß an das verlaſſene Ufer zu legen. Ich weis alſo auch, daß die Beſorgung dieſes letztern nur von der Hand des Landsfürſten kann beſtritten werden. Aber welch ein würdiges Unternehmen für einen Landesherrn, und Vater ſeines Volkes wä-

re

re wohl dieſes? Die Herren des Meeres werden in der Geſchichte unſterblich, wenn ſie einen Meerhafen von dem Schlamme räumen: und werden es die Herren der Flüße minder werden, wenn ſie den Lauf ihrer Gewäſſer zum Nutzen ihrer Unterthanen in ſeiner alten Bequemlichkeit erhalten? das Volk wird die Gnade ſeines Fürſten anrühmen, wenn er ihm den erlittenen Schaden mit einem Nachlaſſe der Abgaben erleichtert; es wird ihn aber Vater nennen, wenn er jedem ſeinen von dem Waſſer entzogenen Grund wieder giebet. Es wäre alſo mein Gedanken, daß man nach der Ueberſchwemmung, zur Zeit, da keine neue Ergüßung zu befürchten iſt, als etwann im ſpäten Herbſte, den Fluß, wo er ausgeriſſen, in das alte Flußbett zu bringen ſuchen ſoll. Solches in das Werk zu ſetzen, darf ich keinen Vorſchlag machen, wo es an erfahrnen Feldmeſſern keinen Mangel giebt; ich darf aber ein Unternehmen empfehlen, das einem Kaufmannsſchiffe nicht nur die alte, ſondern immer mehrere Sicherheit, und Bequemlichkeit: einem an dem Ufer wohnenden Landmann den alten Grund (der, ſey er auch noch ſo überſchüttet, doch noch zum Nutzen gerichtet werden kann) und endlich dem Landsfürſten die gründlichſte Ehre, und aufrichtigſte Liebe zum Gewinnſte darbieten wird.

18. §.

Ich ſchreibe vieleicht zu viel von dem Vortheile der Handelſchaft; was liegt einem Kaufmanne daran, ob er auf dieſer, oder auf jener Seite des Flußes hinab, oder hinauffahre, wenn er nur ſicher fährt, und an dem beſtimmten Ufer ausladen kann? Aber wie oft müſſen auch die erfahrenſten Schiffleute das Erkänntniß des von dem Fluße genommenen neuen Rinnſaals mit der Strandung, wo nicht gar mit der Scheiterung eines reich beladenen Schiffes bezahlen? Ich ſchreibe alſo nicht zuviel, weil ich überdas noch vorſehe, man werde zu dieſem Unternehmen noch weit mehr Vor-

solchen zu einem baubaren Felde machen soll? Jener wird sein Kind, wenn es auch noch so ausgeartet ist, jederzeit zur Verbesserung gerne aufnehmen: dieser wird einen fremden, so unartigen Züchtling, wenn er ihm auch geschenkt wird, mit schielen Augen ansehen. Das Glück für unser Vaterland ist, daß unser Durchleuchtigste Maximilian bey seiner Vollmacht, nicht das Joch, sondern den Geist der Gesetze kennet.

20. §.

Ich schreibe im Eifer. Allein, wer sollte sich nicht über sich erheben, wenn seine patriotischen Gedanken den Vortreflichkeiten des besten Fürsten sich näheren dürfen? Sie kennen nun hochansehnliche erlauchte Mitglieder meine **Gedanken, wie dem fast jährlichen, von Austrettung, und Ueberschwemmung unserer namhaften Flüße, verursachten Schaden nach den Naturgesetzen des Wassers zu steuern sey?** daß man nämlich 1. vor der Ergüßung Vorkehrung mache, daß der anschwellende Fluß nicht reiße, sondern sich ohne Schaden sanft ausgießen könne: daß man 2. dem wirklich reißenden Stromme keine Schlächten, oder Wehren entgegen stelle, die das Wasser mit Untergraben untauglich machen könnte: daß man 3. nach der Ueberschwemmung, um alles in den alten Stand zu setzen, vor allem trachte, den etwann ausgetrettenen Fluß in das alte Rinnsaal zu bringen: um so unsern besten, aber gähling aufgebrachten Freund vor der Wuth zu zerstreuen, bey selber unschädlich, und nach selber wiederum dienstbar zu machen. Dieses sind nun meine Gedanken, die ich als unvollkommen Ihnen zur Ueberlegung, zur Verbesserung, und zur Ausarbeitung vorlege: mich aber begnüge, daß ich meine Pflicht, wenigstens zum Theil, mehrmal erfüllet habe.

Regiſter
der merkwürdigſten Sachen.

Alcaliſches Sälz, iſt in den Pflanzen enthalten ſ. Farben.

Amorths, (Herrn Euſebius) Frage, wo ſo viele Ausgüßungen der Flüße in Baiern herrühren, und wie denſelben abzuhelfen 177 - 180.

Archimedeiſche Waſſerſchraube ſ. Waſſerſchraube.

Arſenik, Unterſchied deſſelben vom reinen Spießglaſe. 90.

Ausgüßungen der Flüße. ſ. Flüße.

Bergbau, Scheidts Abhandlung von dem unterirdiſchen Baue bey Bergwerken 279 - 316. Das Wort Bauen hat bey Bergleuten verſchiedene Bedeutungen, je nachdem ſie über oder unter der Erde bauen 282. Wie man der Waſſernoth, und den böſen Wettern entgegen gehen müße 284. Verſchiedene Arten der Durchbrechungen, ihre Vortheile und Ungemächlichkeiten 285. ꝛc. Von dem unterirdiſchen Bergbaue in faſt wagerecht- oder ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen 291 - 296. Vom unterirdiſchen Bergbaue in erhobenen Erd- und Steinlagen 296 - 304. Von der Feſtigkeit und Dauer der unterirdiſchen Berggebäude in faſt wagerecht oder ſchwebend liegenden Erd- und Steinlagen. 304 - 314. Krummes Holz iſt zur Auszimmerung des Schachtes beſſer, als das gerade 310 - 312. Ein Vorſchlag zur Ausmauerung der Hauptſchächte 313. Von der Feſtigkeit und Dauer der unterirdiſchen Berggebäude in erhobenen Erd- und Steinlagen 315 und 316.

Beſchleunigung und Druck ſind einerley Kräfte, und nur nach Verſchiedenheit der Umſtände in ihren Wirkungen unterſchieden. 153.

Brun-

Brunwiſers, Verſuche mit mineraliſchen ſauren Geiſtern aus den Hölzern Farben zu ziehen, dann zufällige Gedanken, wie aus dieſen Farben die Röthe, Blaue, Grüne, und Gelbe der Blüthen, Blumen, Früchten, und Blätter der Vegetabilien zu erklären. 317 - 340.

— — Entdeckung verſchiedener vegetabiliſchen Farbmaterialien, Seiden und Wollenzeuge ſchön und dauerhaft gelb zu färben. 341 - 351.

Buchholzes, Abhandlung von Verbeſſerung des Spießglasſchwefels. 87 - 96.

Centralkräfte, Leonard Grubers einige Grundſätze der Theorie der Centralkräfte in Rückſicht auf die Aſtronomie. 203 - 244. Beweis, daß man jede Centralkraft, welche in ſehr kleinen Zeitpunkten ſich äußert, als eine einförmige Zunehmungs- oder Beſchleunigungskraft annehmen könne. 207. Vorläufige Theorie der Centralkräfte 222 - 228. Sätze von den Centralkräften in Rückſicht auf den Lauf der Planeten 228. Aufgaben hievon und deren Auflöſungen 236 - 244. Beweis, daß die Centralkräfte, wenn ſie im umgekehrten verzweyfältigten Verhältniſſe wirken, einen Kegelſchnitt beſchreiben 243 und 244.

Druck und Beſchleunigung ſind einerley Kräfte, und nur nach Verſchiedenheit der Umſtände in ihren Wirkungen unterſchieden. 153.

Durchbrechungen, verſchiedene im Bergbaue 285. ꝛc.

Farben, Mathias Brunwiſers Verſuche, wie mit mineraliſchen ſauren Geiſtern aus den Hölzern Farben zu ziehen, und wie aus dieſen Farben die Röthe, Blaue, Grüne und Gelbe der Blüthen, Blumen ꝛc. zu erklären. 317. 340. Gelegenheit zu dieſen Verſuchen 320. 321. Es ſteckt im Holze ein unſichtbares Farbeweſen 321. Brennbare Geiſter ſind zu Abſönderung deſſelben nicht tauglich. 321. Die Luftſäure iſt Urſache, warum die meiſten abgehauenen Hölzer im Anfange weiß, und wenn ſie der Luft ausgeſetzt ſind, gelb werden 321. Verſuch das Farbeweſen aus den Hölzern durch mineraliſche ſaure Geiſter auszuziehen 322. Salzſäure, Vitriolſäure, und Salpeterſäure leiſten verſchiedene Wirkungen 323. 324. Die gelbe Farbe iſt nicht flüchtig, wohl aber die rothe, und noch mehr die blaue. 323. Marggraf beweiſet, daß in allen Pflanzen ein weſentliches alcaliſches Salz verſteckt iſt. 325. Dieſes Salz iſt die Urſache, warum die Hölzer ihre Farben verborgen halten 326. Augenſcheinlicher Beweis hievon 327. Erklärung

klärung, wie die Farben aus dem Stamme in die Blätter, Blüthen, Blumen, und Früchte überbracht werden 329. 330. Delavals Meinung von der Grüne der Blätter. 330. Eine andere Erklärung davon 331 - 334. Wo es herkomme, daß einige Hölzer in ihrem Innersten gefärbt sind. 335. Ob nicht die Röthe des Geblüts von der Luftsäure herrühren könne. 337. Ob der Geruch der Pflanzen nicht von der Luftsäure entwickelt werde 337. Nutzen dieser Versuche für Gärtner, und Holzkünstler 338. wie auch Tücher und Seidenzeuge schön und dauerhaft gelb oder grün zu färben. 339.

— — — Brunwisers Entdeckung verschiedener vegetabilischen Farbmaterialien, Seiden und Wollenzeuge schön und dauerhaft gelb zu färben 341 - 351. Materialien zu gelben Farbstoffen sind gar nicht zahlreich 343. Gelegenheit zu gegenwärtiger Entdeckung 343. 344. Die rothe, blaue, und gelbe Farbe sind all das Schöne, was wir in den Pflanzen bewundern. 344. Die rothe und blaue haben noch nicht können fixirt werden. 344. Art die gelbe Farbe aus den Hölzern zu erhalten, und selbe auf Seiden und Wollenzeuge anzubringen. 345 - 347. Die auf diese Art gelb gefärbten Zeuge kommen an Schönheit, Glanz und Dauerhaftigkeit den ostindianischen und französischen gleich. 347. Man soll aber dazu kein harzichtes Holz nehmen 347. Hölzer, die diese Farbe liefern 348. Die schlechtesten, und zu anderm Gebrauche untauglichsten Hölzer liefern die schönste gelbe Farbe, und in grosser Quantität. 348 - 350. Die so gefärbten Zeuge werden mit Lauge verdorben, aber durch die Seife nur schöner 351.

Flüße, Herrn Amorths Frage, wo so viele Ausgüßungen der Flüße in Baiern herrühren, und wie denselben abzuhelfen 177 - 180. Sie rühren nicht von einem in größerer Menge als sonst, herabfallenden Regen oder Schnee her, sondern vielmehr von der Häufung des Sandes in dem Grunde des Flußes 177. sind sehr schädlich 178. Das füglichste Mittel darwider wäre eine Nachahmung der zu Venedig errichteten Maschine zu Säuberung des Meergrundes. 178. Eine Stiftung hiezu hätte vor vielen andern frommen Stiftungen einen Vorzug 179. 180.

— — — P. Clarus Mayrs Gedanken, wie dem fast jährlichen von Austrettung der Flüße verursachten Schaden nach den Naturgesetzen des Wassers zu steuren sey. 353 - 373. Je unmerklicher das Rinnsaal des Wassers von der Horizontallage abnimmt, und je weniger die Masse des abfließenden Wassers eingeschränkt wird, desto weniger Schaden ist davon zu besorgen.

357.

357. Man ſoll dem Fluße, wo es möglich, ein von der Horizontallage unbemerklich abhangendes Flußbett, oder eine Oeffnuug am Ufer machen, damit er ſich ſanft ergieße, das Ufer aber mit Geſträuchen wohl verlegen, damit nur Waſſer, und keine Erde oder Früchte bey dem Ablaufe durchfließen. 357. 358. Der Schlamm wird hierdurch nicht ſchädlich, ſondern vielmehr ein guter Dung werden 359. Wider das Reißen der Flüße ſind unſre Schlächte und Wehren die tauglichſten Mittel. 360. Ein Vorſchlag wider das Untergraben der Flüße 361. — 366. ein anderer Vorſchlag hierzu 367. Einem abgewichenen Fluße ſoll man ſein voriges Rinnſaal anzuweiſen trachten 370 : 372. Das juſtinianiſche Jus alluvionis bey den Flüßen hat ein Vorurtheil zum Grunde. 372. 373.

Geruchstheile der Pflanzen, ob dieſe nicht von der Luftſäure entwickelt werden. 337.

Grubers, (Leonard) analytiſche Beyſpiele und Anwendungen der verſchiedenen Wendungen der krummen Linien 181 : 202.

— — — einige Grundſätze der Theorie der Centralkräfte in Rückſicht auf die Aſtronomie. 203. : 244.

— — — Brief von Berechnung des im Jahre 1769. erſchienenen Kometen 245. 278.

Halley rühmet ſich, nie im aſtronomiſchen Kalkulus gefehlet zu haben 247.

Hennerts, Auflöſung der berliniſchen Preisfrage von der archimedeiſchen Waſſerſchraube iſt irrig. ſ. Waſſerſchraube.

Hevelius, hat die Parabole der Kometen erfunden. 248.

Hölzer, ſ. Farben.

Karſtens, Abhandlung von den Projectionen der Kugel. 1 : 32.

— — — von der archimedeiſchen Waſſerſchraube. 33 : 86.

— — — über die Theorie der Saugwerke. 97 : 146.

— — — Verſuch eines evidenten Beweiſes der allgemeinen mechaniſchen Grundſätze 147 : 175.

Kögelſchnitte, ſ. Centralkräfte.

Komet, Leonard Grubers Brief von Berechnung des im Jahre 1769. erſchienenen Kometen 245 : 278. Halley allein rühmet ſich, nie im aſtronomiſchen Kalkulus gefehlt zu haben 247. Hevelius hat die Parabole der

Kometen erfunden 248. De la Caille und de la Lande haben die Anomalie derſelben durch allgemeine Tabellen aufgeklärt. 249. Die Annehmung eines ungewiſſen Verhältniſſes zweyer Diſtanzen iſt die Urſache der öfteren Irrungen in Berechnung eines Kometen 249. Es iſt nicht thunlich, daß man eine andere Methode der Berechnung des Kometen, als die gewöhnliche iſt, erfinde 254. Newtons Methode iſt nicht hinreichend 251. 253. Doch läßt ſich hieraus für die gemeine Berechnung ein groſſer Vortheil ziehen, nämlich die genaueſten Verhältniſſe der zween Abſtände gleich auf das erſtemal zu finden. 253. Anwendung dieſer Methode auf den letzten Kometen 254. 272. Die newtonianiſche Methode iſt der bekannten ſogar vorzuziehen, wenn der Komet nur etliche Tage kann beobachtet werden 266. Die Länge der Dunſtſäule des letzten Kometen 273. 274. Die Dünne der Dunſtſäule 274. 275. Whiſtons Erklärung von der Sündfluth durch einen Kometen. 275. 276. Die Ueberſchwemmungen in Amerika ſind keine Wirkung des letzt erſchienenen Kometen. 276. 278.

Kräfte lebendige und todte. 170. 174.

Kugel, ſ. Projectionen.

Leibnitzens, lebendige und todte Kräfte 170. 174.

Linien, Leonard Grubers analytiſche Beyſpiele und Anwendungen der verſchiedenen Wendungen der krummen Linien 181. 202. Hauptbegriffe, die man dabey vorausſetzen muß 185. 188. Die ganze Abänderung einer gegebenen Gleichung zu finden 191. Die Vielfältigkeit des gegebenen Punctes zu beſtimmen 191. und 193. Selben auf die krumme Linie zu beziehen. 192. Die Natur der krummen Linie für die gegebene Gleichung aufzuforſchen. 194. 195. allgemeinere Fälle. 197. 202.

Luftſäure, ſ. Farben.

Mayrs, (P. Clarus) Gedanken, wie dem faſt jährlichen von Austrettung der Flüße verurſachten Schaden nach den Naturgeſetzen des Waſſers zu ſteuren ſey. 353.

Mechaniſche allgemeine Grundſätze, Karſtens Verſuch eines evidenten Beweiſes derſelben. 147. 175. Die Fundamentalgleichung der ganzen Mechanik ſchien Herrn Daniel Bernoulli noch nicht für erwieſen. 149. Kaſtners Beweis ſcheint der hinreichendſte zu ſeyn 150. Statik und Mechanik ſollen als beſondere Wiſſenſchaften abgehandelt werden. 150. Das

Wort Kraft iſt oft unbeſtimmt gebraucht worden. 151. Gleichförmig beſchleunigende Kräfte. 151 - 163. Druck und Beſchleunigung ſind einerley Kraft, und nur nach Verſchiedenheit der Umſtände in ihren Wirkungen unterſchieden. 153. Ungleichförmig beſchleunigende Kräfte. 163 - 166. Vom Maas der Kräfte. 167. Eigentlich hat weder ein bewegter noch ruhender Körper etwas, was den Name Kraft verdiente. 169 und 170. Die Leibnitziſche Eintheilung der Kräfte in todte und lebendige iſt unverſtändlich. 170 - 174.

Newtons, Methode von Berechnung der Kometen. 251 - 253.

Parents, acht Aufgaben von der Theorie der Saugwerke ſind von Belidor nicht genug erläutert. ſ. Saugwerke.

Projectionen der Kugel. Karſtens Abhandlung davon. 1 - 32. Die alten Geometer haben ſie allezeit als Kögelſchnitte betrachtet. 4. Eulers Begrif vom ſchiefen Kegel iſt vom apolloniſchen und euclideiſchen unterſchieden. 5. Aufgaben davon, und deren Auflöſungen 6 - 26. Von der ſtereographiſchen Projection der Meridiane der Kugel. 26. Von der ſtereographiſchen horizontal Projection der Meridiane. 26. 27. Von der ſtereographiſchen Projection der Parallelkreiſe des Aequators 29. Von der ſtereographiſchen horizontal Projection der Parallelkreiſe des Aequators. 29.

Saugwerke, Karſtens Abhandlung über die Theorie derſelben 97 - 146. Zwey Stücke werden zu einem guten Saugwerke erfordert. 99. Drey Klaſſen der Saugwerke 100. Unterſuchung über die anfängliche Bewegung des Waſſers in der Saugröhre, und dem Stiefel, bevor es den Kolben erreicht. 103 - 128. Parents acht Aufgaben ſind von Belidor nicht genug aufgeklärt. 119 - 128. Unterſuchung über die Bewegung des Waſſers im Stiefel, nachdem ſchon alle Luft aus dem ſchädlichen Raume ausgetretten iſt. 129. ꝛc. Johanns und Daniels Bernoulli Entdeckungen in der Hydraulik, und deren Anwendung auf die Waſſerpumpe 136. 137. Belidors Irrungen 135 - 146.

Scheidts, Abhandlung vom unterirdiſchen Baue bey Bergwerken 279 - 316.

Spießglasſchwefel. Buchholzes Abhandlung von Verbeſſerung deſſelben 87 - 96. Unterſchied des groben Spießglasſchwefels, und deren von den letztern Niederſchlägen 87 - 91. Unterſchied des reinen Spießglaſes von dem Arſe-

Luft 90. Die brechendmachende Wirkung ist den regelmäßigen Theilen zuzuschreiben 91. Versuche diesen Schluß zu verbessern 92 & seqq.

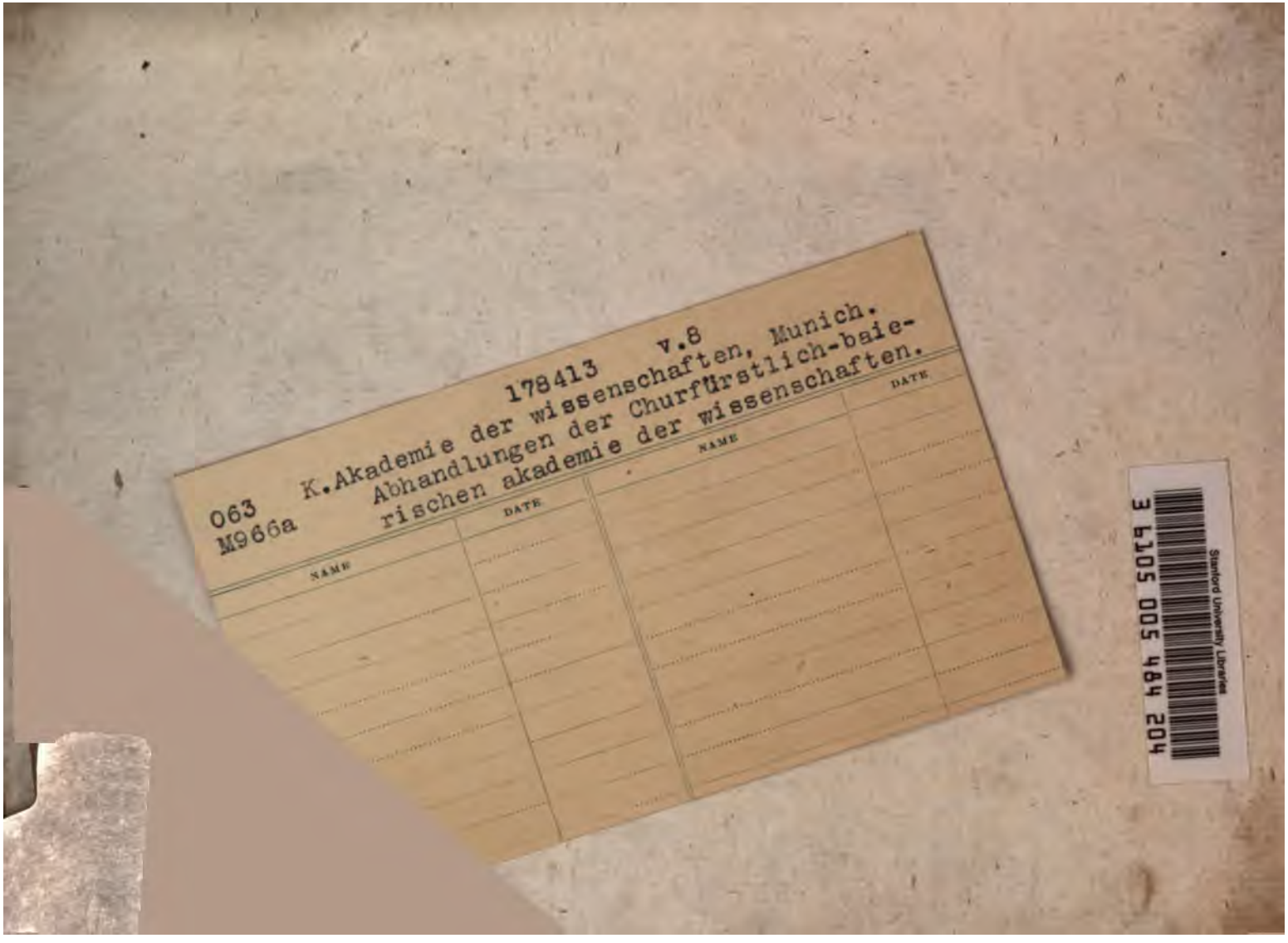
Ueberschwemmungen, s. Flüße.

Ueberschwemmungen in Asperita, sind keine Folgen des letzten Kometen 276. 278.

Wassernoth, und böses Wetter im Bergbaue 284.

Wasserschraube, archimedeische, Karstens Abhandlung davon 33. 86. Herrn Eulers Theorie 35. Preisfrage der königl. Akademie zu Berlin, wie eine Wasserschraube am vortheilhaftesten anzuordnen sey. 35. Herrn Hennerts Auflösung wird gekrönet, ist aber nicht hinreichend. 36. Gestalt der Wasserschraube, und Eintheilung derselben 36. 37. Beweis, daß, wenn die Schnecke das Wasser heben soll, der Neigungswinkel der Grundfläche gegen den Horizont größer seyn müße, als der Winkel der Schraubenlinie mit dem Umfang der Grundfläche 40. 43. Wie das Wasser bloß durch sein Gewicht in der Wasserschraube steigen könne. 43. 45. Das Moment zu finden, womit das Wasser, so wie es durch den ganzen wasserhaltenden Bogen ausgebreitet ist, die Schnecke um ihre Axe zu drehen strebt. 46. 48. Die Länge des wasserhaltenden Bogens zu finden 48. Wenn die Wasserschraube durch eine Maschine umgetrieben wird, und an derselben eine veränderliche Kraft angebracht ist, die von der Geschwindigkeit der Maschine abhängt: welche Menge Wasser diese Maschine bey der vortheilhaftesten Anordnung auf eine gegebene Höhe in gegebener Zeit heben könne. 51. 52. Eine vortheilhafte Anordnung einer Maschine, welche die Wasserschraube umtreiben soll, anzugeben 52 &c. Ob die Wasserschraube ihre Dienste nicht leiste, wenn ihre Grundfläche ganz unter Wasser steht: Eulers und Hennerts Untersuchung darüber 56. ꝛc. Herrn Hennerts Irrung 60. Neue Irrung desselben 71. 86.

Whistons, Erklärung der Sündfluth durch einen Kometen ist nicht gegründet. 275.


063
M966a
K.Akademie der wissenschaften, Munich.
Abhandlungen der Churfürstlich-baierischen akademie der wissenschaften.
178413 v.8
NAME
DATE
NAME
DATE
Stanford University Libraries
3 6105 005 484 204